Топология и дифференциальные формы

Листок №1

Задача 1.1: Пусть M это гладкое многообразие, и пусть $\mathcal{A} := \mathcal{C}^\infty(M)$ это алгебра функций на нём. Рассмотрим $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{C}^\infty(M \times M)$, в котором действие $\mathcal{A}$ приходит из проекции на первую компоненту. Рассмотрим идеал $I \in \mathcal{C}^\infty(M \times M)$ функций, зануляющихся на диагонали. Рассмотрим $\mathcal{A}$-модуль I/I^2. Докажите, что этот $\mathcal{A}$-модуль изоморфен модулю дифференциальных форм.

Задача 1.2: Покажите, что любое дифференцирование алгебры де Рама $\Omega^\bullet(M)$ степени -1 имеет вид i_v для какого-то векторного поля v.

Задача 1.3: Докажите формулу Картана: $L_v = di_v + i_v d$.[1] Выразите $i_{[v,w]}$ через i_v, i_w и d.

Задача 1.4: 5-лемма: Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & E_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & E_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & E_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_4 \arrow[r] & F_5
\end{tikzcd}$$

абелевых групп, в которой обе строки точны, f_2 и f_4 это изоморфизмы, f_1 это эпиморфизм и f_5 это мономорфизм. Докажите, что f_3 это изоморфизм.

Задача 1.5: Рассмотрим для двух комплексов $(M, d_M), (N, d_N)$ градуированное пространство $\mathrm{Hom}(M, N)$, где $\mathrm{Hom}^i(M, N) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M^n, N^{n+i})$. Определим на нём оператор d по формуле $df(m) = f(d_M m) + (-1)^{|f|} d_N f(m)$. Докажите, что $d^2 = 0$. Покажите, что цепные отображения $M \longrightarrow N$ это коциклы степени ноль в получившемся комплексе, и что два коцикла задают один и тот же класс когомологий если и только если соответствующие отображения гомотопны.

Задача 1.6: Покажите, что короткая точная последовательность комплексов индуцирует длинную точную последовательность когомологий.

Задача 1.7: Конус: Пусть $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ это морфизм комплексов. Определим комплекс C_f по формуле $C_f^n := M^{n+1} \oplus N^n$ с дифференциалом $d(m, n) = (-dm, f(m) + dn)$. Докажите, что $d^2 = 0$. Постройте точную тройку комплексов

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow C_f \longrightarrow M[1] \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Докажите, что f — квазиизоморфизм, если и только если C_f ацикличен.

Задача 1.8: Комплекс называется стягиваемым, если тождественное отображение на нём гомотопно нулевому. Покажите, что морфизм комплексов является гомотопической эквивалентностью если и только если его конус стягиваем.

Задача 1.9: Докажите, что любой[2] ацикличный комплекс векторных пространств над полем стягиваемый. Приведите пример нестягиваемого ацикличного комплекса абелевых групп.

[1] Проверьте, что обе части равенства это дифференцирования, и, следовательно, равенство достаточно проверить только на порождающих алгебры де Рама

[2] для начала докажите про ограниченные комплексы

Задача 1.10: Эйлерова характеристика: Пусть (C,d) это ограниченный комплекс конечномерных векторных пространств, и пусть H^* — его когомологии. Докажите, что $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\dim C^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\dim H^i$. Полученное число называется эйлеровой характеристикой C и обозначается через $\chi(C)$. Покажите, что если $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ это точная тройка комплексов, то $\chi(A)+\chi(C)=\chi(B)$.

Задача 1.11: Покажите, что гладко гомотопные отображения гладких многообразий индуцируют гомотопные отображения комплексов де Рама.

Задача 1.12: Лемма Йонеды: Пусть X это объёкт категории $\mathcal{C}$, и пусть h_X это представимый функтор $\mathcal{C}\longrightarrow SETS$, $h_X(Y):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Покажите, что для любого другого функтора $F:\mathcal{C}\longrightarrow SETS$ существует естественный (по X) изоморфизм $\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C},SETS)}(h_X,F)\longrightarrow F(X)$. Выведите, что представляющий объект единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Задача 1.13: Предположим, что $f:M\longrightarrow N$ это морфизм в аддитивной категории, имеющий ядро $k:K\longrightarrow M$ и коядро $c:N\longrightarrow C$.[3] Предположим, что морфизм k имеет коядро $\mathrm{Coim}\, f$, а морфизм c имеет ядро $\mathrm{Im}\, f$. Постройте естественный морфизм $\mathrm{Coim}\, f\longrightarrow \mathrm{Im}\, f$.

Задача 1.14: Аддитивная категория, в которой существуют все ядра и коядра, и в которой морфизм из предыдущей задачи всегда является изоморфизмом, называется абелевой. Докажите, что категория R-модулей для кольца R, категория комплексов R-модулей и категория пучков абелевых групп на топологическом пространстве являются абелевыми. Приведите пример неабелевой аддитивной категории.

Задача 1.15: Докажите, что последовательность пучков абелевых групп $\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ на пространстве X точна если и только если последовательность абелевых групп $\mathcal{F}_x\longrightarrow\mathcal{G}_x\longrightarrow\mathcal{H}_x$ точна для любой точки $x\in X$.

Задача 1.16: Покажите, что если

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}\longrightarrow 0$$

это точная последовательность пучков абелевых групп на пространстве X, то последовательность групп

$$0\longrightarrow\mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{G}(U)\longrightarrow\mathcal{H}(U)$$

точна для любого открытого $U\subset X$. Говорят, что функтор сечений точен слева.

[3] Напомним, что ядро морфизма $f:M\longrightarrow N$ это объект, представляющий функтор $A\mapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(A,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,N))$, а коядро — объект, представляющий функтор $B\mapsto\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(N,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(M,B))$, вместе с надлежащими морфизмами