Топология и дифференциальные формы

Экзамен

Это список задач для экзамена по курсу «Топология и дифференциальные формы» в НМУ в осеннем семестре 2022 года. За задачи можно получить максимум 125 баллов, для получения оценки k надо набрать минимум $(k-2)*30+10$ баллов. Решения присылайте[1] до 28 декабря по адресу `grigorypapayanov2020@u.northwestern.edu`. Вопросы по условиям присылайте туда же или в дискорд `https://discord.gg/7jKHBTdrbH`.

Задача 1: (3 балла) Вычислите $H_c^*(\mathbb{R}^n)$, когомологии де Рама с компактным носителем евклидова пространства.

Задача 2: (5 баллов) Пусть M — многообразие, и пусть $U, V \subset M$ — два открытых подмножества. Постройте точную последовательность комплексов форм с компактными носителями

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \longrightarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \longrightarrow \Omega_c^*(U \cup V) \longrightarrow 0.$$

Соответствующая длинная точная последовательность когомологий называется последовательностью Майера-Вьеториса с компактным носителем.

Задача 3: (7 баллов) Пусть M — ориентированное многообразие размерности n. Докажите, что существует изоморфизм $H^i(M) \longrightarrow (H_c^{n-i}(M))^\vee$. Подсказка: постройте его для $\mathbb{R}^n$ и воспользуйтесь последовательностями Майера-Вьеториса.

Задача 4: (15 баллов) Пусть X — гладкое многообразие, и $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартный симплекс. Сингулярный симплекс $\Delta^n \longrightarrow X$ называется гладким, если он продолжается на некоторую открытую окрестность Δ^n в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что граница гладкого сингулярного симплекса гладкая. Докажите, что комплекс функций на гладких сингулярных симплексах (комплекс гладких сингулярных коцепей) вычисляет сингулярные когомологии X.

Задача 5: (15 баллов) Пусть A и B— две дг-алгебры, причём A минимальна. Пусть $f_0, f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ — морфизмы дг-алгебр. Пусть $F_0, F_1 : A \longrightarrow B[t, dt]$ — морфизмы дг-алгебр, задающие гомотопии между f_0 и f_1 и между f_1 и f_2. Постройте гомотопию между f_0 и f_2. Подсказка: примените теорию препятствий.

Задача 6: (7 баллов) Вычислите ранги гомотопических групп $\dim \pi_i(S^4 \vee S^5) \otimes \mathbb{Q}$ для $i \leq 14$.

[1] Пожалуйста, если записываете решения от руки, присылайте их одним файлом в формате .pdf

Задача 7: ($\sum_{i=1..n-2} i$ баллов, $\max n = 7$, баллы удваиваются, если вычислите ещё и умножение) Вычислите когомологии алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ с тривиальными коэффициентами.

Задача 8: (10 баллов) Покажите, что если

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

коммутативная диаграмма гладких многообразий, в которой каждая горизонталь — это расслоение, и вертикальные стрелки индуцируют изоморфизмы $H^*_{dR}(F') \longrightarrow H^*_{dR}(F)$ и $H^*_{dR}(B') \longrightarrow H^*_{dR}(B)$, то стрелка $H^*_{dR}(E') \longrightarrow H^*_{dR}(E)$ это тоже изоморфизм.

Задача 9: (8 баллов) Пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра от конечномерного пространства, градуированная степенью формы. Пусть $d : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V)$ это дифференцирование, в квадрате равное нулю. Покажите, что оно однозначно задаётся своим ограничением $d : V \longrightarrow \Lambda^2(V)$. Обозначим скобкой отображение

$$[-,-] : \Lambda^2(V^\vee) \longrightarrow (\Lambda^2(V))^\vee \longrightarrow V^\vee,$$

полученное обращением (существующим в силу конечномерности) канонического морфизма $(\Lambda^2(V))^\vee \longrightarrow \Lambda^2(V^\vee)$ и двойственного отображения $d^\vee$. Докажите, что скобка $[-,-]$ удовлетворяет тождеству Якоби. Покажите, что алгебра $(\Lambda(V), d)$ минимальна если и только если соответствующая алгебра Ли нильпотентна.

Задача 10: (15 баллов) Пусть E это тавтологическое двумерное расслоение над комплексным грассманианом $Gr(2,4)$ двумерных плоскостей в $\mathbb{C}^4$. Вычислите

$$\int_{Gr(2,4)} e(S^3 E)$$

число Эйлера симметрического куба от E.

Задача 11: (10 баллов) Пусть S^1 действует на $S^2 = \mathbb{C}P^1$ стандартным вращением, $t \cdot (z_0 : z_1) = (tz_0 : z_1)$. Вычислите эквивариантные когомологии. Докажите, что это действие эквивариантно формально.