Задание #2

12 сентября

Напомним, что собственный идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым,* если $A/\mathfrak{p}$ не имеет делителей нуля. Множество простых идеалов в кольце A называется его *(простым) спектром* и обозначается $\operatorname{Spec} A$.

Задача 1

Скажем, что категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ *эквивалентны*, если существуют функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, такие что композиции $F \circ G$ и $G \circ F$ изоморфны соответствующим тождественным функторам. Докажите, что категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется строго полный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, такой что для всякого объекта Y из $\mathcal{D}$ найдется такой объект X из $\mathcal{C}$, что $Y \simeq F(X)$. (Последнее условие называется *существенной сюръективностью.*)

Задача 2

Пусть $S \subset A$ — произвольное подмножество в коммутативном кольце A. Покажите, что

$$S^{-1}A \simeq A[\{x_s\}_{s\in S}]/(\{1 - sx_s\}_{s\in S}).$$

Задача 3

Пусть $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество. Постройте эквивалентность между категорией модулей над $S^{-1}A$ и категории A-модулей, таких что всякий элемент $s \in S$ действует на них автоморфизмами.

Задача 4

Пусть $\phi : A \to B$ — морфизм коммутативных колец. Докажите, что операция взятия обратного образа индуцирует отображение $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

Задача 5

Пусть $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество. Докажите, что операция взятия обратного образа отождествляет $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ с множеством $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, таких что $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

Задача 6

Идеал $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ называется *минимальным,* если он минимален по отношению, заданному вложением: если $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ и $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Докажите, что если A — нётерово кольцо, то множество минимальных идеалов конечно и непусто.