НМУ, Алгебра-1
Листок 12. 05.12.2022

Задача 1. Для группы S_n зададим *стандартное представление* V_n как ограничение представления $\rho : S_n \to GL_n(\mathbb{C})$ на гиперплоскость $\{a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n : a_1 + \ldots + a_n = 0\}$. Здесь $\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$.

а) Покажите, что стандратное представление неприводимо.

б) Пусть $m \in \mathbb{N}$. Разложите $m-$ую тензорную степень стандартного представления S_3 на неприводимые.

в) Какова кратность тривиального представления в S_n в тензорном кубе стандартного представления?

Задача 2.
Опишите неприводимые представления A_4 и составьте таблицу характеров.
Задача 3.
Пусть p — простое число, K — поле характеристики p и G — конечная группа, причем $p \mid |G|$. Положим

$$\eta = \sum_{g \in G} g \in K[G].$$

Докажите, что $U = K\eta$ является подпредставлением в регулярном представлении и $K[G]$ не содержит подпредставления V такого, что

$$K[G] = U \oplus V.$$

Задача 4.
Докажите, что неприводимые представления конечной абелевой группы одномерны. Верно ли это для бесконечных групп?
Задача 5.
Докажите, что не существует простых групп порядка 1000000.
Задача 6. Назовем натуральное число n циклическим, если оно свободно от квадратов и для любых двух его простых делителей p и q выполнено $q \not\equiv 1 \pmod{p}$.

а) Пусть n не циклическое. Покажите, что существуют нециклические группы порядка n.

б) Пусть n — наименьшее такое циклическое число, что существует нециклическая группа G порядка n. Докажите, что для неединичных элементов g_1 и g_2 выполнено либо $Z(g_1) \cap Z(g_2) = \{e\}$, либо $Z(g_1) = Z(g_2)$.

в) Предположим, что $g \in G$ имеет простой порядок. Докажите, что $N(\langle x \rangle) = Z(x)$ и число подгрупп G, сопряженных $Z(x)$, равно $|G|/|Z(x)|$.

г) Пусть p и q — простые делители n, $g, h \in G$ имеют порядки p и q, соответственно. Предположим также, что $q \nmid |Z(g)|$. Рассмотрите множество

$$X = \bigcup_{t \in G} tZ(x)t^{-1} \cup \bigcup_{k \in G} kZ(y)k^{-1}$$

и покажите, что $|X| > n$.