

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2022,  
ЛИСТОК 4 (5 ОКТЯБРЯ)

*Задача 1.* Приведите пример автономного векторного поля на прямой, решения которого не продолжаютя ни вперед ни назад неограниченно.

*Задача 2.* Пусть решение  $\varphi$  уравнения  $\dot{x} = v(x, t)$ , определено на интервале, содержащем отрезок  $[a, b]$ . Верно ли, что решения с близкими начальными условиями определены на  $[a, b]$  (т.е. найдется такое положительное  $\varepsilon$ , что при любом  $t_0 \in [a, b]$  найдется решение  $\psi(t)$ , определенное на всем  $[a, b]$ , такое что  $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \varepsilon$ )?

*Задача 3.* Для уравнения маятника  $\ddot{x} = -\sin(x)$  пусть  $T(a)$  – наименьший период решения с начальным условием  $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ . Найдите предел  $T(a)$  при  $a \rightarrow 0$ .

*Задача 4.* Какие из следующих векторных полей переводятся друг в друга диффеоморфизмами прямой? Векторные поля  $-\sin(x)\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $2\sin(x)\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\sin^2(x)\frac{\partial}{\partial x}$ .

*Задача 5.* Докажите, что гладкое векторное поле  $v(x)\frac{\partial}{\partial x}$  на прямой, растущее на бесконечности не быстрее линейного (т.е.  $|v(x)| < a + b|x|$  при подходящих  $a$  и  $b$  и всех  $x$ ), определяет фазовый поток на прямой.

*Задача 6.* Докажите, что решения линейного неавтономного уравнения  $\dot{x} = A(t)x$  ( $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$   $A(t)$  – гладко зависящий от параметра  $t$  линейный оператор) продолжаютя вперед и назад неограниченно.