

НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 8.
Когомологии де Рама-II. 22.11.2022.

В данном листке под когомологиями подразумеваются исключительно когомологии де Рама. При решении задач данного листка запрещено использовать изоморфизмы с другими когомологиями.

Задача 1. (Лемма о пяти гомоморфизмах). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \\ \dots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

из векторных пространств и их гомоморфизмов, такую что горизонтальные стрелки образуют две точные последовательности. Докажите, что если a, b, d, e являются изоморфизмами, то c тоже изоморфизм.

Задача 2. Найдите когомологии $\mathbb{C}P^n$.

Задача 3. Найти кольцо когомологий $\mathbb{R}P^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{R}P^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях).

Задача 4. Найти когомологии двумерной сферы с g приклеенными ручками.

Задача 5. Найти когомологии бутылки Клейна $\mathbb{K}l$.

Задача 6. Найти когомологии $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ (дополнение к окружности в трехмерном пространстве).

Задача 7. Найти когомологии $S^3 \setminus S^1$ (дополнение к окружности в трехмерной сфере).

Задача 8*. Докажите лемму Пуанкаре для когомологий с компактным носителем: $H_c^k(M \times \mathbb{R}^1) = H_c^{k-1}(M)$. *Указание.* Пусть t обозначает стандартную координату на \mathbb{R} . Рассмотрите отображение послыоного интегрирования $\pi_* : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(M)$, которое формы без dt переводит в ноль, а формы с dt интегрирует $\int_{\mathbb{R}^1}$. Пусть $e = e(t)dt$ такая форма с компактным носителем на \mathbb{R}^1 , что $\int_{\mathbb{R}^1} e = 1$. Рассмотрите отображение $e_* : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1)$, это просто операция умножения на e . В качестве оператора гомотопии рассмотрите оператор $K : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(M \times \mathbb{R}^1)$, который переводит формы без dt в ноль, а формы с dt он преобразует так:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^t \omega - \int_{-\infty}^t e \int_{-\infty}^{+\infty} \omega.$$

Задача 9. Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.

Задача 10*. Пусть M^n гладкое компактное ориентированное многообразие без края, ω — n -форма на M , а $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ гладкая функции. Положим $M_c = \{x | \varphi(x) \leq c\}$.

Предположим, что $c_0 \in \mathbb{R}$ такое число, что $\varphi(x) = c_0 \implies d\varphi(x) \neq 0$. Тогда M_{c_0} — многообразие с краем, и M_c — тоже многообразие с краем для всех c их некоторой окрестности c_0 .

Пусть

$$F(c) := \int_{M_c} \omega.$$

Доказать, что $F(c)$ является гладкой функцией от c и производная $\frac{dF(c)}{dc}$ может быть представлена в виде интеграла $\int_{\partial M_c} \tilde{\omega}$ от некоторой $n-1$ -формы $\tilde{\omega}$.

Найти $\tilde{\omega}$.