Теория гомотопий

Напомним, что $[X, Y]$ обозначает множество классов гомотопных отображений $X \to Y$.

Задача 6.1. Докажите, что пространства X, Y гомотопически эквивалентны, если для любого Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z.

Задача 6.2. Докажите, что пространства X, Y слабо гомотопически эквивалентны, если для любого *клеточного* пространства Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z.

Задача 6.3. Приведите пример слабо гомотопически эквивалентных пространств X, Y, для которых не существует ни слабой гомотопической эквивалентности $f\colon X \to Y$, ни слабой гомотопической эквивалентности $g\colon Y \to X$.

Задача 6.4. Пусть D^2_+ и D^2_- — верхняя и нижняя замкнутые полусферы в S^2, и N — северный полюс. Убедитесь, что $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(S^2 \setminus N, D^2_+ \setminus N) = 0$. Аналогично, $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(D^2_-, D^2_- \cap D^2_+) = 0$. Таким образом, свойство вырезания не выполнено для $\pi_3(S^2, D^2_+)$.

Задача 6.5. Докажите, что для любой n-связной клеточной пары (X, A) существует клеточное пространство Z, получаемое из A приклеиванием клеток размерности $> n$, и гомотопическая эквивалентность $Z \to X$, неподвижная на A.

Задача 6.6. Покажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные группы гомологий.

Задача 6.7. Покажите, что пространства $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $S^n \times \mathbb{R}P^m$ имеют одинаковые гомотопические группы, но при $m \neq n$ и $n > 1$ их группы гомологий различны.

Задача 6.8. Покажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые группы гомологий, но разные гомотопические группы.

Задача 6.9. Вычислите $\pi_n(S^1 \vee S^n)$.

Задача 6.10. Докажите, что для любого $n > 0$ и любой группы π, которая должна быть абелевой при $n > 1$, существует клеточное пространство X, для которого $\pi_n(X) = \pi$ и $\pi_i(X) = 0$ при $i \neq n$. Такое пространство X называется *пространством Эйленберга–Маклейна* и обозначается $K(\pi, n)$.

Задача 6.11. Докажите, что пространство $K(\pi, n)$ единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Задача 6.12. Убедитесь, что **а)** $K(\mathbb{Z}, 1) \simeq S^1$, **б)** $K(\mathbb{Z}_2, 1) \simeq \mathbb{R}P^\infty$, **в)** $K(\mathbb{Z}, 2) \simeq \mathbb{C}P^\infty$, **г)** все двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами типа $K(\pi, 1)$.

Задача 6.13. **а)** Пусть X — связное клеточное пространство. Докажите, что существует коммутативная диаграмма пространств и отображений в которой каждое отображение $X \to X_n$ индуцирует изоморфизм групп π_i при $i \leq n$, а $\pi_i(X_n) = 0$ при $i > n$. Эта диаграмма называется *башней Постникова* для X.

б) Докажите, что гомотопическим слоем отображения $X_n \to X_{n-1}$ в башне Постникова является пространство типа $K(\pi, n)$, где $\pi = \pi_n(X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & X_3 \arrow[d] \\
 & X_2 \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_1
\end{tikzcd}$$