Клеточные гомологии

Задача 1. Вычислите гомологии **а)** произведения сфер $S^n \times S^n$ при $n \geq 2$; **б)** трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$.

Задача 2. Пусть N_g — замкнутая неориентируемая поверхность рода g, т. е. сфера с g вклеенными листами Мёбиуса. Вычислите гомологии поверхности N_g, пользуясь клеточной структурой с одной нульмерной клеткой, g одномерными клетками $c_1, \ldots, c_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2$.

Задача 3. Вычислите гомологии пространства X, полученного приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам. В частности, рассмотрите случай приклеивания клеток по словам $a^5 b^{-3}$ и $b^3(ab)^{-2}$. Что можно сказать о фундаментальной группе такого пространства?

Эйлерова характеристика

Задача 4. Докажите, что для конечных клеточных пространств X, Y имеет место соотношение $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

Задача 5. Докажите, что если $X = A \cup B$, где X — клеточное пространство, а A, B — клеточные подпространства в X, то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

Задача 6. Докажите, что для n-листного накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ над конечным клеточным пространством X имеет место соотношение $\chi(\widetilde{X}) = n\chi(X)$.

Теорема Пуанкаре

Задача 7. а) Постройте естественный гомоморфизм $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$.

б) Пусть X — линейно связное пространство. Докажите, что h — эпиморфизм.

в) Докажите, что $\ker h$ — в точности коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$.