Степень отображения

Задача 1. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах.* Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда
а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.
Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.
Задача 2. Для отображения $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(S_n) \to H_n(S_n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d. Это число называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$.
Докажите следующие свойства степени:
а) $\deg \mathrm{id} = 1$.
б) $\deg f = 0$, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не сюръективно.
в) Если отображения f и g гомотопны, то $\deg f = \deg g$.

▷ Верно и обратное утверждение: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны.
г) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$.
д) Если $f\colon S^n \to S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости, например, $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то $\deg f = -1$.
е) Антиподальное отображение $-\mathrm{id}\colon S^n \xrightarrow{x \mapsto -x} S^n$ имеет степень $(-1)^{n+1}$.
Задача 3. Докажите, что если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.
Задача 4. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечётно.

▷ Говорят, что группа G *действует* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$, такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.
Задача 5. Докажите, что для чётного n единственной нетривиальной группой, которая может действовать свободно на S^n, является $\mathbb{Z}_2$.
Задача 6. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f\colon S^n \to S^n$ степени k.

Теорема единственности

Пусть Ho$\mathcal{CW}$ — гомотопическая категория CW-комплексов: объектами являются классы гомотопически эквивалентных CW-комплексов, а морфизмами — классы гомотопных отображений. *Теорией гомологий* на называется последовательность функторов[1] $h_n\colon \mathrm{Ho}\mathcal{CW} \to \mathcal{A}b, n \in \mathbb{Z}$, занумерованных целыми числами, вместе с естественными изоморфизмами $h_n(X) \to h_{n+1}(\Sigma X)$ для всех X в Ho$\mathcal{CW}$, причём для каждого h_n выполняются следующие аксиомы.

1. Для любого корасслоения $A \to X$ в Ho$\mathcal{CW}$ последовательность $h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X/A)$ точна.

2. Для букета $X = \vee_\alpha X_\alpha$ с включениями $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow X$ прямая сумма $\bigoplus\limits_\alpha (i_\alpha)_*\colon \bigoplus\limits_\alpha h_n(X_\alpha) \to h_n(X)$ — изоморфизм.

Задача 7. Покажите, что имеет место длинная точная последовательность гомологий

$$\dots \to h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X/A) \to h_{n-1}(A) \to \dots$$

Положим $\widetilde{h}_n(X) = \ker\big(h_n(X) \to h_n(pt)\big)$ продолжим h_n на категорию CW-пар равенством $h_n(X,A) = \widetilde{h}_n(X/A$. Основной целью первой части данного листка является доказательство следующей теоремы.

Задача 8. Покажите, что длинная точная последовательность из предыдущей задачи может быть переписана в виде

$$\dots \to h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X,A) \to h_{n-1}(A) \to \dots$$

Теорема. *Пусть h_* — теория гомологий на категории CW-пар и $h_n(pt) = 0$ при $n \neq 0$. Тогда имеют место естественные изоморфизмы $h_n(X,A) \cong H^n\big(X,A;h_0(pt)\big)$ для всех CW-пар и всех n.*

Задача 9. Пусть X^n — n-й остов CW-комплекса X.

а) Используя длинные точные последовательности для пар (X^n, X^{n-1}), постройте клеточный цепной комплекс

$$\dots \to h_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} h_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} h_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \to \dots$$

б) Докажите, что гомологии полученного комплекса равны $h_n(X)$.

Задача 10. а) Покажите, что $h_n(S^n) \cong h_0(pt)$.

б) Покажите, что отобрение в точку и тождественное отображение $S^n \to S^n$ индуцируют умножение на 0 и на 1 соответственно.

в) Докажите, что $h_n(f+g) = h_n(f)+h_n(g)$, для любых отображений $f,g\colon S^n \to S^n$ сохраняющих отмеченные точки.

г) Выведите из этого, что клеточные комплексы для $h_*(X)$ и $H_*\big(X;h_0(pt)\big)$ изоморфны.

Отсюда мы немедленно получаем, что $h_n(X) \cong H_n\big(X;h_0(pt)\big)$.

Задача 11. Используя рассуждения аналогичные рассждениям выше, покажите, что построенный изоморфизм естественнен, т. е. для любого отображения $f\colon X \to Y$ имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
h_n(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h_n(f)"] & H_n\big(X;h_0(pt)\big) \arrow[d, "H_n(f)"] \\
h_n(Y) \arrow[r, "\cong"] & H_n\big(Y;h_0(pt)\big)
\end{tikzcd}$$

Указание. Рассмотрите индуцированное отображение $X^n/X^{n-1} \to Y^n/Y^{n-1}$.

[1] Здесь и далее $\mathcal{A}b$ — категория абелевых групп.