

Естественность групп гомологий

3◊1. Проверьте, что граничное отображение $\partial: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ гомологий цепных комплексов определено корректно и является гомоморфизмом.

3◊2. Докажите, что $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ для любых $x_0 \in X$ и $n \geq 0$.

3◊3. Выведите точную последовательность пары для приведённых гомологий:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

3◊4. Напомним, что *отображением пар* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ называется отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $f(A) \subset B$. Докажите, что отображение пар индуцирует гомоморфизмы $f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$, $n \geq 0$.

3◊5. Докажите, что если отображения $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопны в классе отображений пар (т.е. существует гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ между f и g , такая, что $F(A \times I) \subset B$), то индуцируемые ими отображения гомологий пар совпадают: $f_* = g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$, $n \geq 0$.

3◊6. Докажите следующее свойство *естественности* гомологической последовательности пары: для отображения пар $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

3◊7. Определите и докажите точность *гомологической последовательности тройки* для (X, A, B) , где $B \subset A \subset X$:

$$\dots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X, B) \longrightarrow \dots$$

3◊8. Докажите, что включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизмы всех групп гомологий тогда и только тогда, когда $H_n(X, A) = 0$ для всех n .

3◊9. Докажите при помощи групп гомологий *общую теорему Брауэра*: непрерывное отображение шара D^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.