6

6.1. Пользуясь таблицами Кэли, оцените сверху и снизу количество *изоморфных классов* трёхэлементных *магм.*
6.2. Рассмотрите на произвольном множестве операцию $a * b = b$. Ассоциативна ли она? Обладает ли нейтральным элементом? Можно ли так ослабить требование к нейтральному элементу, чтобы рассматриваемая операция ему удовлетворяла?
6.3*. (Фюрстенберг, 1955). Покажите, что группу можно определить как множество с одной бинарной операцией $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} : (g, h) \mapsto g/h$, удовлетворяющей двум аксиомам:
1) $\forall f, g, h \in G \ [(f/h)/(g/h) = f/g]$;
2) $\forall g, h \in G \ [\exists x \ [g/x = h]]$.
Умножение в G задаётся равенством $gh := g/((h/h)/h)$.

6.4. Составьте таблицу Кэли группы автоморфизмов трёхэлементного множества так, чтобы её левый верхний 3×3 угол оказался таблицей Кэли трёхэлементной циклической группы. Ваши наблюдения над остальными 3×3-*четвертинками*? Их объяснение?
6.5. Докажите, что любая некоммутативная группа порядка 8 имеет вид $\{1, a, a^2, a^3; b, ab, a^2b, a^3b\}$. Постройте часть (3/4) соответствующей таблицы Кэли. Убедитесь в том, что для b^2 есть только две возможности: $b^2 = 1$ и $b^2 = a^2$. Завершите построение таблиц Кэли каждой из групп.
6.6. Обозначив $\mathrm{i} := \mathrm{i} + 0 \cdot \mathrm{j}$ и $\mathrm{k} := 0 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{j}$ кватернионы из тела $\mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot j$, убедитесь, что множество кватернионов $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ образует группу по умножению. Какой из групп предыдущей задачи она изоморфна?
6.7. Составьте левые и правые разложения по классам смежности всех подгрупп группы $\mathrm{Aut}\{1, 2, 3\}$. В каких случаях левые и правые разложения совпадают?
6.8. Перечислите нормальные подгруппы всех известных вам 8-элементных групп. Определите соответствующие фактор-группы.
6.9. Убедитесь, что группа $\mathrm{Aut}\{1, 2, 3\}$ изоморфна полупрямому произведению 2-элементной и 3-элементной групп.
6.10. Какие из известных вам 8-элементных групп разлагаются в *нетривиальные* полупрямые произведения?

6.11.** Выполняется ли в категории групп аналог *теоремы Кантора-Бернштейна*: если *каждая из двух групп изоморфна собственной подгруппе другой*, то *группы изоморфны*? **Совет.** Рассмотрите свободные группы с двумя образующими и со счётным множеством образующих.

25 октября, *Г.Б. Шабат*