Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2018

АЛГЕБРА, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Лекция 9 (15 ноября 2018):
К классификации конечных групп (ПЛАН)

9.0. Однородные пространства 1
...9.0.0. Транзитивные действия групп на множествах 1
...9.0.1. Примеры 1
...9.0.2. Формула орбит 1
9.1. p-адические показатели 2
...9.1.0. Определение 2
...9.1.1. Формула произведения 2
9.2. Отступление: целые числа и функции на spec($\mathbb{Z}$)dotfill2
9.3. К обращению теоремы Лагранжа 2
...9.3.0. Решётка подгрупп 2
...9.3.1. Обратная "теорема"Лагранжа 2
9.4. Группа A_4 и её подгруппы
9.5. Классификация конечных абелевых групп
9.6. Теоремы Силова

9.0. Однородные пространства

9.0.0. Транзитивные действия групп на множествах. Пусть $G \in\in \mathcal{GRP}$ и $X \in\in G\text{-}\mathcal{SET}$. Действие $G : X$ называется *транзитивным*, если

$$\exists x \in X[X = G \cdot x].$$

Множество X в этом случае называется *однородным G-пространством.*

9.0.1. Примеры. $\mathrm{Aut}(X) : X$. Геометрия и физика, Эрлангенская программа Клейна. Однородность и изотропность Вселенной. Действия группы на себе.

9.0.2. Формула орбит. Если к тому же $\#G < \infty$, то $\forall x \in X$

$$\#X = \frac{\#G}{\#G_x}.$$

Применение: порядки групп вращений платоновых тел.

9.1. p-адические показатели

9.1.0. Определение. Для $p \in \Pi$

$$\mathrm{ord}_p : \dot{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : n \mapsto \max\{k \mid n \in p^k\mathbb{N}\}.$$

9.1.1. Формула произведения: $\forall n \in \dot{\mathbb{N}}$

$$\boxed{n = \prod_{p \in \Pi} p^{\mathrm{ord}_p(n)}}$$

9.2. Отступление: целые числа и функции на spec($\mathbb{Z}$)

Числа похожи на многочлены...

9.3. К обращению теоремы Лагранжа

9.3.0. Решётка подгрупп. Функториальность?
9.3.1. Обратная "теорема"Лагранжа. Нет!

9.4. Группа A_4 и её подгруппы

$\mathrm{SubGr}_6(\mathsf{A}_4) = \varnothing$

9.5. Теоремы Силова (формулировки)

$G \in\in \mathcal{GRP}, \#G < \infty$.
$p \in \Pi, \#G \in p\mathbb{N}$.

$$\mathrm{Syl}_p(G) := \{H \in \mathrm{SubGr}(G) \mid \#H = p^{\mathrm{ord}_p(\#G)}\}$$

$n := \mathrm{ord}_p(\#G)$,

Первая тС. $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \varnothing$
Доказательство. $X := \mathrm{Sub}_{p^n}(G)$.
Лемма. $\#X = \binom{\#G}{p^n} \notin p\mathbb{N}$
$G : X$ сдвигами. Найдётся орбита $G \cdot Y \notin p\mathbb{N}$.
$H := G_Y \in \mathrm{Syl}_p(G)$■

Вторая тС. *Все силовские подгруппы сопряжены.*
Доказательство. Пусть $H_1, H_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Заставим H_1 действовать на левых смежных классах $\{gH_2\}$ левыми сдвигами. Все орбиты имеют порядок $\in p^{\mathbb{N}}$, но их общее количество $\notin p\mathbb{N}$, поэтому найдутся 1-элементные орбиты. ■

Третья тС. $[\#\mathrm{Syl}_p(G) \in (\mathbb{N}p + 1) \wedge [\#\mathrm{Syl}_p(G) \mid \#G]$.
Доказательство. G действует на $\mathrm{Syl}_p(G)$ сопряжениями... ■