

Листок 1

Пусть задано отображение $T : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, и пусть $T^n(x) := T(T(\dots T(x)) \dots)$ — n -кратное применение отображения T . *Траекторией* точки x называется последовательность $\{x, T(x), T^2(x), \dots, T^n(x), \dots\}$. Траектория точки x называется *периодической*, если существует n такое, что $T^n(x) = x$; траектория называется *пре-периодической*, если существуют n и k такие, что $T^{k+n}(x) = T^k(x)$.

Подмножество $A \subset [0; 1]$ называется *всюду плотным*, если для любого интервала $I \subset [0; 1]$ существует точка из A , лежащая в этом интервале.

Будем обозначать символом $\{x\}$ дробную часть числа x .

Задача 1.1. Пусть $T : x \rightarrow \{x + \alpha\}$, α — фиксированное вещественное число. Для всех α опишите множества точек с периодическими траекториями и множества точек с всюду плотными траекториями.

Задача 1.2. Какие числа из отрезка $[0; 1]$ обладают более, чем одной записью вида $0.w_1w_2w_3\dots$ в двоичной системе счисления ?

Задача 1.3. Пусть $T : x \rightarrow \{2x\}$. Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

Задача 1.4. Опишите для отображения $T : x \rightarrow \{2x\}$ множества периодических и пре-периодических траекторий.

Задача 1.5. Пусть

$$T : x \rightarrow \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0; 1/2] \\ 2 - 2x, & \text{при } x \in [1/2; 1]. \end{cases}$$

Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

Задача 1.6. Пусть $T : x \rightarrow 4x(1 - x)$. Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

Организационные замечания

1. Наряду с экзаменом, количество сданных задач будет существенно влиять на итоговую оценку по курсу.

2. Сдавать задачи следует Лёше Буфетову. Сделать это можно следующими способами:

а) Отправить на alexey.bufetov@gmail.com записанные решения задач. Можно в теке, можно в виде разборчивых отсканированных или сфотографированных рукописных записей.

б) Договориться (по указанной выше почте или же на занятии) об устной сдаче.

3. Листки будут выкладываться на странице курса на сайте Независимого университета (<http://ium.mccme.ru/f13/blank-f13.html>).