

## Интеграл, плоские параметрические кривые

1. Найдите неопределенные интегралы: (а)  $\int x^\alpha dx$ ; (б)  $\int \ln x dx$ ; (в)  $\int x^2 e^x dx$ .

2. Используя интеграл, найдите пределы:

(а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right)$ ; (б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ ,  $\alpha > 0$ ; (в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

3. Докажите, что, если существует  $I_1 = \int_a^b f(x) dx$ , то существует  $I_2 = \int_a^b |f(x)| dx$  и  $I_1 \leq I_2$ .

4. Докажите, что монотонная и ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

5. Покажите, что функция  $f \in C^1[a, b]$  может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

6. Пусть  $D(x)$  и  $R(x)$  – функции Дирихле и Римана, соответственно. Существуют ли интегралы  $\int_a^b D(x) dx$  и  $\int_a^b R(x) dx$ ? Если существуют, то чему они равны?

*Рассмотрим отображение  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Предположим, что  $x(t)$  и  $y(t)$  дифференцируемы достаточное число раз, их производные по  $t$  обозначим  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ . Вектор  $v(t) = \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  называется вектором скорости. Отображение  $\gamma$  называется гладкой кривой, если  $v(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

7. Найдите уравнение касательной к кривой  $\gamma$  в точке  $(x(t_0), y(t_0))$ ,  $t_0 \in (a, b)$ . Напомним, что касательной называется такая прямая  $L$ , что расстояние от точки  $(x(t), y(t))$  до  $L$  равно  $o(t - t_0)$ ,  $t \rightarrow t_0$ .

*Длиной кривой  $\gamma[a, b]$  называется число  $l_\gamma = \int_a^b \|v(t)\| dt$ ,  $\|v(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ .*

8. Докажите, что при допустимой смене параметризации длина кривой не меняется, то есть, если  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ,  $h(\alpha) = a$ ,  $h(\beta) = b$ ,  $h'(\tau) > 0$ ,  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , то  $l_{\gamma \circ h} = l_\gamma$ .

9. (а) Пусть плоская кривая задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Докажите, что длина кривой равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(б) Докажите, что длина кривой  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [a, b]$ , заданной в полярных координатах, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

10. Найдите длину (а) единичной окружности; (б) участка параболы.

11. Покажите, что на всякой гладкой кривой  $\gamma$  можно ввести параметр  $s$ , такой, что  $s = l_\gamma[0, s]$ . Такой параметр называется *натуральным*. Докажите, что параметр  $t$  – натуральный тогда и только тогда, когда  $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$ .

12. Пусть  $s$  – натуральный параметр кривой  $\gamma(s)$ . Положим:  $v(s) = \gamma'(s)$ ,  $a(s) = v'(s)$ . Докажите, что векторы  $v(s)$  и  $a(s)$  перпендикулярны.

13. Функция  $\kappa(s) = |a(s)|$  называется *кривизной* кривой  $\gamma$ . Положим, что  $n(s) = a(s)/\kappa(s)$ . Докажите, что  $n'(s) = -\kappa(s)v(s)$  (*формула Френе*).

14. Пусть кривизна кривой  $\gamma$  в точке  $\gamma(s_0)$  отлична от нуля, то есть  $\kappa(s_0) \neq 0$ . Найдите окружность  $S$ , для которой  $\|\gamma(s) - S(s)\| = o((s - s_0)^2)$ . Предполагается, что  $s$  – натуральный параметр окружности  $S$ .

15\*. Постройте непрерывное отображение  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , образом которого является весь квадрат с внутренностью. Такие непрерывные кривые называются кривыми Пеано. *Указание: используйте для этого запись действительных чисел в троичной системе счисления.*