

# АЛГЕБРА, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

## ПРОГРАММА КУРСА

### 1. КОЛЬЦА

- (1) Кольца и поля. Гомоморфизмы колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках для колец вычетов.
- (2) Идеалы, факторкольца, теорема о гомоморфизме. Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, связь между ними. Взаимная простота, НОД, ассоциированные элементы. Китайская теорема об остатках для колец главных идеалов.
- (3) Факториальные кольца. Простота и неприводимость. Связь между простотой и неприводимостью элементов и факториальностью кольца. Факториальность целостных колец главных идеалов. Многочлены. Лемма Гаусса.
- (4) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Основная теорема о симметрических многочленах.

### 2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

- (1) Векторные пространства. Примеры.  $n$ -мерное арифметическое пространство. Линейная зависимость и независимость. Базис, размерность. Двойственное пространство.
- (2) Линейные отображения. Изоморфизм. Базис как изоморфизм с арифметическим пространством. Двойственное пространство. Изоморфизм конечномерного пространства и дважды двойственного к нему. Аннулятор векторного пространства. Прямая сумма пространств. Факторпространство.
- (3) Матрица линейного отображения. Произведение матриц. Линейные операторы. Грассмановы многочлены. Определитель. Определитель композиции операторов равен произведению определителей.
- (4) Перестановки. Знак перестановки. Внешние степени оператора. Миноры как матричные элементы внешней степени

оператора. Формула для определителя. Разложение определителя по столбцу, по строке.

- (5) Кососимметричные полилинейные формы. Связь с определителем. Собственные векторы оператора. Диагонализуемый оператор. Теорема Гамильтона–Кэли.

### 3. Модули

- (1) Модуль над кольцом. Примеры. Векторное пространство с оператором как  $k[t]$ -модуль. Система порождающих, базис. Свободный модуль, ранг свободного модуля. Модули над кольцами главных идеалов. Подмодуль свободного модуля свободен. Теорема о взаимных базисах.
- (2) Теорема о структуре конечнопорождённых модулей над кольцами главных идеалов. Теорема о структуре конечнопорождённых абелевых групп. Жорданова нормальная форма и жорданов базис оператора. Теорема о жордановой нормальной форме.
- (3) Результант и дискриминант.