Вычисление определителей

А8.1. Найдите определитель $n \times n$-матрицы (a_{ij}), где

а) $a_{ij} = ij$; **б)** $a_{ij} = i + j$; **в)** $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$; **г*)** $a_{ij} =$НОД(i, j).

А8.2. *Континуантой* $(a_1 a_2 \dots a_n)$ называется следующий определитель $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

а) Выразите $(a_1 a_2 \dots a_n)$ в виде многочлена от $a_1, a_2, \dots a_n$.

б) Напишите разложение континуанты по первым k строкам.

в) Докажите, что

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

А8.3. *Матрицей Вандермонда* называется следующая матрица $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

а) Найдите определитель этой матрицы.

Указание. Выясните, при каких значениях переменных определитель обращается в нуль.

б) Найдите обратную к матрице Вандермонда.

А8.4 (Формула Ньютона). Пусть e_k — k-я элементарная симметрическая функция от переменных $x_1, \dots, x_n$, а $s_k := x_1^k + \dots + x_n^k$ — k-я степенная сумма.

а) Докажите, что s_k равняется определителю

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}.$$

б) Докажите, что $k! e_k$ равняется определителю

$$\det \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & e_{k-3} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{pmatrix}.$$

А8.5. **а)** Линейный оператор A в конечномерном пространстве над полем характеристики 0 таков, что $\operatorname{Tr} A^n = 0$ для любого натурального n. Докажите, что оператор A нильпотентен.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гамильтона–Кэли.

б) Верно ли это над полем положительной характеристики?