# Производные категории – 2

В прошлый раз мы определили для абелевой категории $\mathcal{A}$ её производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Сейчас мы изучим, как она устроена.

Простейшие комплексы – это комплексы с единственным ненулевым членом. Имеется естественный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, сопоставляющий объекту $M$ абелевой категории $\mathcal{A}$ комплекс $M[0]$, сосредоточенный в нулевом члене. Для $M \in \mathcal{A}$ через $M[i]$ мы обозначаем $i$-й сдвиг комплекса $M[0]$: $M[i]^k = M$ при $k = -i$, $M[i]^k = 0$ иначе. Выясним, как устроены морфизмы в производной категории между объектами вида $M[i]$.

Для этого, да и не только, нам понадобится понятие *канонического обрезания* комплекса. Пусть $K^\bullet$ – комплекс. Определим комплекс $(\tau_{\leqslant n}K)^\bullet$ следующим образом:

$$(\tau_{\leqslant n}K)^i = \begin{cases} K^i & \text{при } i < n; \\ Z^n(K^\bullet) & \text{при } i = n; \\ 0 & \text{при } i > n, \end{cases}$$

дифференциалы такие же, как в $K^\bullet$. Несложно видеть, что $\tau_{\leqslant n}$ действует не только на объектах, но и на морфизмах, т.е. является функтором. Для каждого $K^\bullet$ обрезание $(\tau_{\leqslant n}K)^\bullet$ – подкомплекс в $K^\bullet$, это определяет морфизм функторов $\tau_{\leqslant n} \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}$. Для каждого $K^\bullet$ морфизм $(\tau_{\leqslant n}K)^\bullet \to K^\bullet$ индуцирует изоморфизм на $i$-х когомологиях при $i \leqslant n$, а при $i > n$ когомологии $(\tau_{\leqslant n}K)^\bullet$ нулевые.

Очевидно, что $\tau_{\leqslant n}$ переводит морфизмы, гомотопные нулю, в морфизмы, гомотопные нулю, а квазиизоморфизмы – в квазиизоморфизмы. Поэтому $\tau_{\leqslant n}$ продолжается до функторов на категориях $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

**Задача 1.** a) Определите канонические правые обрезания $\tau_{\geqslant n}$, постройте морфизм функторов $\mathrm{Id}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})} \to \tau_{\geqslant n}$. b) Проверьте, что факторкомплекс $K^\bullet$ по $(\tau_{\leqslant n}K)^\bullet$ квазиизоморфен $(\tau_{\geqslant n+1}K)^\bullet$.

**Задача 2.** a) Проверьте, что функтор $\tau_{\leqslant n}$ сопряжён справа к вложению $\mathrm{Kom}_{\leqslant n}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, а функтор $\tau_{\geqslant n}$ сопряжён слева к вложению $\mathrm{Kom}_{\geqslant n}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.
b) Будет ли аналогичное верно для гомотопических и производных категорий?

Начнём со следующего факта.

**Предложение 1.** *Естественный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон.*

*Доказательство.* Нужно проверить, что отображение

$$Q\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M[0],N[0])$$

– биекция для любых $M,N \in \mathcal{A}$. Во-первых, $Q$ инъективно: пусть $Q(f) = 0$, тогда домик $f \circ 1_{M[0]}^{-1}$ эквивалентен нулю. Значит, для некоторого квазиизоморфизма $K^\bullet \xrightarrow{s} M[0]$ имеем $fg \sim 0$. Перейдём к морфизму на $H^0$, получим, что $H^0(f)H^0(g) = 0$. Но $H^0(g)$ – изоморфизм, значит $f = H^0(f) = 0$.

Во-вторых, $Q$ сюръективно. Пусть морфизм $M[0] \to N[0]$ задан домиком $M[0] \xleftarrow{t} K^\bullet \xrightarrow{g} N[0]$. Положим $f = H^0(g)\colon M \to N$ и покажем, что домик $gt^{-1}$ эквивалентен домику $f1_{M[0]}^{-1}$. Действительно, эквивалентность задаётся при помощи квазиизоморфизмов $(\tau_{\leqslant 0}K)^\bullet \to K^\bullet$ и $(\tau_{\leqslant 0}K)^\bullet \to M$. $\square$

Очевидное следствие – при всех $i$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M[i],N[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N).$$

Теперь рассмотрим комплексы $M[i]$ и $N[j]$, где $i \neq j$.

**Предложение 2.** *При $i > j$ имеем* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M[i], N[j]) = 0$.

*Доказательство.* Опять же, пусть морфизм задан домиком $M[i] \xleftarrow{t} K^\bullet \xrightarrow{g} N[j]$. Заменим его на эквивалентный домик $M[i] \leftarrow (\tau_{\leqslant -i}K)^\bullet \xrightarrow{g'} N[j]$. При этом $(\tau_{\leqslant -i}K)^k = 0$ при $k > -i$, а $N[j]^k \neq 0$ только при $k = -j > -i$, значит $g' = 0$. □

Более интересно устроены морфизмы из $M[i]$ в $N[j]$ при $i < j$. Они уже известны нам как группы Ext по Йонеде. Пусть для простоты $i = 0$.

Действительно, всякому расширению

$$0 \to N \to K_{j-1} \to \ldots \to K_1 \to K_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

можно поставить в соответствие домик $M \xleftarrow{d_0} [N \to K_{j-1} \to \ldots \to K_0] \to N[j]$. Несложная проверка показывает, что эквивалентным расширениям соответствуют эквивалентные домики, тем самым определено отображение

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[j]). \tag{1}$$

Покажем, что оно эпиморфно.

Пусть $M[0] \xleftarrow{t} K^\bullet \xrightarrow{g} N[j]$ – домик. Во-первых, заменяя $K^\bullet$ на $(\tau_{\leqslant 0}K)^\bullet$ при помощи квазиизоморфизма $(\tau_{\leqslant 0}K)^\bullet \to K^\bullet$, можно считать, что $K^i = 0$ при $i > 0$. Во-вторых, заменяя $K^\bullet$ на $(\tau_{\geqslant -j}K)^\bullet$ при помощи квазиизоморфизма $K^\bullet \to (\tau_{\geqslant -j}K)^\bullet$, можно считать, что $K^i = 0$ при $i < -j$. Наконец, можно достичь того, что $K^{-j} = N$. Для этого нужно заменить $K^\bullet$ на квазиизоморфный ему комплекс

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{-j} \arrow[r, "d^{-j}"] \arrow[d, "g"] & K^{-j+1} \arrow[r, "d^{-j+1}"] \arrow[d] & K^{-j+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & K^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \times^{K^{-j}} K^{-j+1} \arrow[r] & K^{-j+2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K^0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Мы получили, что исходный домик эквивалентен домику, полученному из расширения.

**Задача 3.** Проверьте, что отображение (1) мономорфно.

Тем самым, доказано

**Предложение 3.** *При $i < j$ имеется изоморфизм между морфизмами в производной категории и* Ext*'ами по Йонеде:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M[i], N[j]) \cong \mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{A}}(M, N).$$

Описание Ext'ов через морфизмы в производной категории очень удобно. Из него автоматически видно, что $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ – абелева группа, а также это описание позволяет легко ввести умножение на Ext'ах. Отметим, что всё работает без предположения о том, что существует достаточно много проективных или инъективных объектов.

В принципе, любой ограниченный комплекс можно разрезать на комплексы, квазиизоморфные комплексам вида $M[i]$, что позволяет описать морфизмы между ограниченными комплексами через различные группы Ext между когомологиями этих комплексов. Но пока у нас нет для этого технических средств.

Следующее простое замечание оказывается очень полезным.

Функторы когомологий $H^i\colon \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ по определению переводят квазиизоморфизмы в изоморфизмы. Значит, по определению производной категории как локализации они пропускаются через функторы когомологий $H^i\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ на производной категории.

**Задача 4.** a) Покажите, что комплекс $K^\bullet \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, для которого $H^i(K^\bullet) = 0$ при $i \neq n$, квазиизоморфен комплексу вида $M[-n]$. b) Пусть $K^\bullet$ и $L^\bullet$ – комплексы, причём $H^i(K) = 0$ при $i \geqslant n$, а $H^i(L) = 0$ при $i < n$. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = 0$. c) Пусть $K^\bullet$ и $L^\bullet$ – комплексы, причём $H^i(K) = 0$ при $i > 0$, а $H^i(L) = 0$ при $i < 0$. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(K), H^0(L))$.

Теперь предположим, что в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. В этом случае описание морфизмов в производной категории между ограниченными справа комплексами существенно упрощается.

Сначала напомним следующий важный факт.

**Лемма 4.** *Любой морфизм из ограниченного справа комплекса проективных модулей в ацикличный комплекс гомотопен нулю.*

Из него следует

**Лемма 5.** *Пусть $P^\bullet$ – ограниченный справа комплекс с проективными членами, а $F^\bullet$ – ещё один комплекс. Пусть дан квазиизоморфизм $s\colon F^\bullet \to P^\bullet$. Тогда существует квазиизоморфизм $t\colon P^\bullet \to F^\bullet$ такой, что $st$ гомотопно $1_{P^\bullet}$.*

*Доказательство.* Напишем длинную точную последовательность морфизмов в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, связанную с морфизмом $s$:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, F^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, P^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, C(s)^\bullet) \ldots$$

Согласно лемме, единичный морфизм из $P^\bullet$ в $P^\bullet$ переходит в ноль, значит найдётся $t\colon P^\bullet \to F^\bullet$, такой что $st \sim 1_{P^\bullet}$. Очевидно, $t$ – также квазиизоморфизм. □

Эту лемму можно считать аналогом универсального свойства проективного объекта абелевой категории для комплексов.

**Лемма 6.** *Пусть $P^\bullet$ – ограниченный справа комплекс проективных объектов, а $K^\bullet$ – ещё один комплекс. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, K^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, K^\bullet).$$

*Доказательство.* Функтор локализации даёт отображение

$$Q\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, K^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, K^\bullet).$$

Покажем, что это – изоморфизм.

Во-первых, пусть $Q(f) = 0$. Это значит, что для некоторого квазиизоморфизма $s\colon P'^\bullet \to P^\bullet$ верно $fs \sim 0$. Найдём по лемме 5 такой квазиизоморфизм $t\colon P^\bullet \to P'^\bullet$, что $st \sim 1_{P^\bullet}$. Получим, что $f \sim fst \sim 0$.

Во-вторых, пусть морфизм из $P^\bullet$ в $K^\bullet$ в категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ задан домиком $P^\bullet \xleftarrow{s} P'^\bullet \xrightarrow{f} K^\bullet$. По лемме 5 найдём такой квазиизоморфизм $t\colon P^\bullet \to P'^\bullet$, что $st \sim 1_{P^\bullet}$. Тогда данный домик эквивалентен домику $P^\bullet \xleftarrow{st=1} P^\bullet \xrightarrow{ft} K^\bullet$, который есть $Q(ft)$. □

Обозначим через $\mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$ полную подкатегорию в $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, образованную ограниченными справа комплексами. Через $\mathrm{Kom}^+(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A})$ обозначим полные подкатегории, образованные соответственно ограниченными слева и ограниченными комплексами. Аналогичные обозначения введём для гомотопических и производных категорий: так, $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ обозначает полную подкатегорию в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, образованную ограниченными комплексами.

Допуская некоторую вольность в обозначениях, лемму 6 можно сформулировать так: $\mathcal{D}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) = \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}))$, где $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ обозначает категорию проективных объектов в $\mathcal{A}$. А если в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то таким образом можно описать морфизмы между всеми ограниченными справа комплексами.

*(Левой) резольвентой* комплекса $K_\bullet$ называется квазиизоморфизм $s\colon F_\bullet \to K_\bullet$.

**Лемма 7.** *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда любой ограниченный справа комплекс над $\mathcal{A}$ имеет ограниченную справа резольвенту из проективных членов.*

*Доказательство.* Будем строить резольвенту по индукции, начиная с меньших степеней. Если $K_i = 0$ при $i < i_0$, то положим в качестве базы индукции $P_i = 0$ при $i < i_0$. Пусть уже построена диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "s_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "s_{n-1}"] & \cdots \\
K_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & K_n \arrow[r, "d_n"] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

в которой $s_i$ индуцируют изоморфизмы в когомологиях при $i < n$. Накроем $Z_n(K)$ проективным объектом: $P'_n \xrightarrow{s'_n} Z_n(K)$, положим $d_n(P'_n) = 0$ и заменим $P_n$ на $P_n \oplus P'_n$. Теперь отображение $s_n$ на циклах (а значит, и на гомологиях) сюръективно. Чтобы сделать $H_n(s)$ изоморфизмом, достаточно сделать $s_n$ сюръективным на границах. Накроем $s_n^{-1}(B_n(K)) \subset P_n$ проективным объектом: $P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n$ и поднимем отображение $s_n d_{n+1}\colon P_{n+1} \to B_n(K)$ до отображения $s_{n+1}\colon P_{n+1} \to K_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "s_{n+1}"] \arrow[dr, bend left] & P_n \oplus P'_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "s_n + s'_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "s_{n-1}"] & \cdots \\
K_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & K_n \arrow[r, "d_n"] & K_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Шаг индукции совершён. $\square$

Из доказанных лемм вытекает

**Предложение 8.** *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда имеется эквивалентность:*

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \cong \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})).$$

*Доказательство.* Действительно, естественный функтор $Q\colon \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон согласно лемме 6. А из леммы 7 следует, что он существенно сюръективен. $\square$

Заметим, что для неограниченной производной категории аналогичное утверждение неверно. В качестве примера рассмотрим комплекс $K^\bullet$

$$\ldots \to A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \to \ldots$$

проективных модулей над кольцом $A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$. Он ацикличен, т.е. изоморфен нулю в производной категории. Однако комплекс $K^\bullet$ не стягиваем, т.е. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(K^\bullet, K^\bullet) \neq 0$.

Ограниченные версии производных категорий, которые мы ввели выше, можно определять по-другому. А именно, можно определить $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ как локализацию $\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A})$ по квазиизоморфизмам. Сейчас мы покажем, что эти определения равносильны.

Так же, как и для неограниченных производных категорий, можно показать, что локализации $\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A})$ и $\mathrm{K}^b(\mathcal{A})$ по квазиизоморфизмам эквивалентны. Поэтому мы докажем

**Предложение 9.** *Естественный функтор*

$$F\colon K^b(\mathcal{A})[qis^{-1}] \to \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$$

*– эквивалентность.*

*Доказательство.* Проверим строгую полноту, а существенная сюръективность очевидна. Во-первых, пусть дан морфизм в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ в виде домика $K^\bullet \xleftarrow{s} K'^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet$. Нужно заменить домик на эквивалентный, у которого вершина домика – ограниченный комплекс. Комплексы $K^\bullet$ и $L^\bullet$ ограничены по условию, пусть их ненулевые члены лежат в диапазоне $[a+2, b-2]$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Заменим $K'^\bullet$ на $(\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}K')^\bullet$. Очевидно, что те же формулы, что и для $K'^\bullet$, зададут морфизмы $t$ и $g$. Эквивалентность домиков $fs^{-1}$ и $gt^{-1}$ задаётся диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & & (\tau_{\leqslant b}K')^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & K'^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"] & & (\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}K')^\bullet \arrow[dlll, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
K^\bullet & & & & L^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Это рассуждение доказывает сюръективность $F$ на морфизмах, теперь проверим инъективность. Пусть $F$ переводит домик $K^\bullet \xleftarrow{s} K'^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet$ в ноль, это значит, что для некоторого квазиизоморфизма $s'\colon K''^\bullet \to K'^\bullet$ имеем $fs' \sim 0$. Очевидно, что $fs'$ и $ss'$ также будут являться морфизмами из ограниченного комплекса $K'''^\bullet = (\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}K'')^\bullet$ в $K^\bullet$ и $L^\bullet$, причём снова $fs' \sim 0$. А значит, исходный домик задавал нулевой морфизм и в $\mathrm{K}^b(\mathcal{A})[qis^{-1}]$. $\square$

Аналогичное предложение выполнено и для ограниченных с одной стороны производных категорий.

**Задача 5.** Верно ли, что для любого ограниченного комплекса $K^\bullet$ и квазиизоморфизма $K'^\bullet \to K^\bullet$ существует квазиизоморфизм $K''^\bullet \to K'^\bullet$, где $K''^\bullet$ – снова ограниченный комплекс?

В заключение рассмотрим ещё одну конструкцию, связанную с расширением абелевых категорий.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – абелева подкатегория. В таком случае можно рассмотреть категорию $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ – полную подкатегорию в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, образованную комплексами, у которых все когомологии лежат в $\mathcal{B}$. С другой стороны, определена производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Имеется естественный функтор $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

**Предложение 10.** *Пусть для любого эпиморфизма $f\colon A \to B$ в категории $\mathcal{A}$, где $B \in \mathcal{B}$, существует морфизм $g\colon B' \to A$, такой что $B' \in \mathcal{B}$ и $fg$ – эпиморфизм. Тогда естественные функторы $\mathcal{D}^-(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^-_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ – эквивалентности.*

*Доказательство.* Очевидно, интересующие нас функторы имеют вид $F\colon \mathrm{K}^*(\mathcal{B})[qis^{-1}] \to (\mathrm{K}^*(\mathcal{A})[qis^{-1}])_{\mathcal{B}}$. Так же, как и при доказательстве предложения 9, проверяется, что $F$ инъективен на морфизмах, $F$ сюръективен на морфизмах и что $F$ существенно сюръективен на объектах. Основную роль здесь играет следующая лемма. $\square$

**Лемма 11.** *Пусть в тех же предположениях, что и выше, $K_\bullet$ – ограниченный справа комплекс над $\mathcal{A}$ с гомологиями в $\mathcal{B}$. Тогда существует квазиизоморфизм $K'_\bullet \to K_\bullet$, где $K'_\bullet$ – ограниченный справа комплекс над $\mathcal{B}$. Аналогичное верно для комплексов, ограниченных с обоих сторон.*

**Задача 6.** Докажите эту лемму.

Пример. Пусть $A{-}\mathrm{Mod}$ обозначает категорию $A$-модулей, а $A{-}\mathrm{mod}$ – категорию конечно порождённых $A$-модулей. Тогда $\mathcal{D}^-(A{-}\mathrm{mod}) \cong \mathcal{D}^-_{A-\mathrm{mod}}(A{-}\mathrm{Mod})$.