Производные категории

Как мы видели, при изучении объектов абелевой категории и функторов между абелевыми категориями оказывается полезным рассматривать комплексы, составленные из объектов этой категории. При этом естественно не различать гомотопные друг другу морфизмы, а также отождествлять объект и его резольвенту. Формализация этих требований приводит к определению производной категории.

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Через $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ будем обозначать категорию, где объекты – комплексы, образованные объектами $\mathcal{A}$, а морфизмы – морфизмы комплексов. Это абелева категория, она содержит $\mathcal{A}$ как полную подкатегорию комплексов, сосредоточенных в степени 0 вида $\ldots \to 0 \to A \to 0 \to \ldots$, где A – объект $\mathcal{A}$. Такой комплекс обычно обозначают $A[0]$.

Задача 1. Опишите проективные и инъективные объекты в $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.

Напомним, *квазиизоморфизмом* называется такой морфизм комплексов $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$, что $H^i(f)$ – изоморфизм при всех i. Так, левая резольвента объекта M – это квазиизоморфизм $K_\bullet \to M[0]$, где $K_\bullet$ – комплекс, для которого $K_i = 0$ при $i < 0$. При построении производных функторов мы отождествляли объект со всеми его резольвентами. В действительности, разумно обратить все квазиизоморфизмы между комплексами (тем самым, сделав квазиизоморфные комплексы изоморфными). Соответствующая конструкция называется *локализацией категорий.*

Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная категория, S – произвольный класс морфизмов в $\mathcal{C}$. *Локализацией категории* $\mathcal{C}$ по S называется категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ вместе с функтором $Q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ такие, что:

1. Q переводит морфизмы из S в изоморфизмы;
2. любой функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, переводящий S в изоморфизмы, пропускается через единственный с точностью до изоморфизма функтор $G\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, т.е. $F \cong GQ$.

Предложение 1. *Локализация категорий существует и единственна.*

Доказательство. Единственность следует из универсальности локализации. Существование докажем явной конструкцией.

Определим $\mathcal{C}[S^{-1}]$ так: объекты $\mathcal{C}[S^{-1}]$ – это объекты $\mathcal{C}$. Морфизмы в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ из X в Y – это классы эквивалентности слов определённого вида. Буквами считаются все морфизмы в $\mathcal{C}$, а также символы s^{-1}, где $s \in S$. Слова составляются так, чтобы конец каждой буквы совпадал с началом следующей, началом первой буквы был X, концом последней – Y. Отношение эквивалентности на словах порождено элементарными эквивалентностями:

1. фрагмент $(f)(g)$ (две буквы) можно заменять на (fg) (одна буква);
2. фрагменты $(s)(s^{-1})$ и $(s^{-1})(s)$ можно вычёркивать;
3. буквы вида 1_X и 1_X^{-1} можно вычёркивать.

Композиция морфизмов определяется приписыванием слов, тождественным морфизмом объекта X является слово 1_X (а также пустое слово). Функтор $Q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ определяется так: тождественный на объектах, морфизму f соответствует слово (f). Этот функтор переводит морфизмы из S в изоморфизмы: обратным к (s) является слово (s^{-1}). Если $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функтор, переводящий морфизмы из S в изоморфизмы, то F, очевидно, единственным образом пропускается через Q. □

Задача 2. Проверьте, что фрагмент $(s^{-1})(t^{-1})$ можно заменять на $((ts)^{-1})$.

Пример: локализация кольца. Если $\mathcal{C}$ – категория с единственным объектом, эндоморфизмы которого образуют коммутативное кольцо A, а S – мультипликативная система в A, то локализация $\mathcal{C}$ по S – это категория с одним объектом, эндоморфизмы которого – кольцо A_S.

Определим производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ как локализацию категории комплексов $\mathrm{Kom}(A)$ по классу квазиизоморфизмов.

Задача 3. Пусть $f\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – гомотопный нулю морфизм комплексов. Докажите, что $Q(f) = 0$, где $Q\colon\ \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(A)$ – функтор локализации.

Из предложения 1 следует существование и единственность производной категории, а также её конструктивное описание. Однако это описание во многих отношениях неудобно. Так, множество морфизмов описывается очень неявно, и на практике трудно проверять, эквивалентны ли два морфизма, заданные в виде слов. Также из данного описания множества морфизмов неясно, как определять на них сложение. Проблема в том, что диаграммы стрелок, задающие морфизмы, слишком сложны. Оказывается, что описание морфизмов в локализованной категории заметно упрощается, если класс S удовлетворяет следующим условиям, так называемым *правым условиям Оре.*

1. S насыщен: все тождественные морфизмы лежат в S и если $u = st$ и два морфизма среди u, s, t лежат в S, то и третий лежит в S;

2. для любых f и $s, s \in S$ существуют g и $t, t \in S$, делающие диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[l, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ Z & Y; \arrow[l, "s"] \end{tikzcd}$$

3. если для пары морфизмов f_1 и f_2 существует такое $s \in S$, что $sf_1 = sf_2$, то существует такое $t \in S$, что $f_1 t = f_2 t$.

Если в $\mathcal{C}$ выполнены правые условия Оре, то морфизмы в локализации $\mathcal{C}$ по S можно описать как правые дроби вида fs^{-1}: в длинных дробях все знаменатели можно перевести в начало.

Предложение 2. *Пусть S – класс морфизмов в категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий правым условиям Оре. Тогда локализация $\mathcal{C}[S^{-1}]$ допускает следующее описание. Объекты – объекты $\mathcal{C}$, а морфизмы из X в Y – классы эквивалентности домиков вида*

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Два домика fs^{-1} и gt^{-1} считаются эквивалентными, если существует коммутативная диаграмма с $u \in S$

$$\begin{tikzcd} & & X''' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f", near end] & & X'' \arrow[dlll, "t"', near end] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Y. \end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов fs^{-1} и gt^{-1} определяется так: найдём h и $u \in S$ такие, что $fu = th$, и определим композицию как $(gh)(su)^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & X'' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z.
\end{tikzcd}$$

Доказательство предложения 2, план. Во-первых, необходимо проверить следующее:

1. введённое отношение на домиках – отношение эквивалентности;
2. определение композиции морфизмов не зависит от выбора h и u;
3. определение композиции морфизмов не зависит от выбора домика в классе эквивалентности;
4. композиция ассоциативна;
5. единичным морфизмом служит домик $1_X 1_X^{-1}$.

Тем самым, действительно определена категория. Построим функтор из $\mathcal{C}$ в категорию, введённую выше: объект X переходит в X, морфизм $f\colon X \to Y$ переходит в домик $f \circ 1_X^{-1}$. Необходимо проверить, что это действительно функтор (т.е. тождественные морфизмы переходят в тождественные и композиция переходит в композицию) и что он будет локализацией. Первое очевидно, второе проверяется так же, как в доказательстве предложения 1. $\square$

Если класс морфизмов S в аддитивной категории $\mathcal{C}$ удовлетворяет (правым) условиям Оре, то можно ввести сложение на морфизмах. Пусть fs^{-1} и gt^{-1} – два морфизма из X в Y. Пользуясь условиями 1 и 2, их можно привести к общему знаменателю: найдём $s', t' \in S$ такие, что $st' = ts'$, и получим $fs^{-1} = ft't'^{-1}s^{-1} = ft'(st')^{-1}$, $gt^{-1} = gs'(ts')^{-1} = gs'(st')^{-1}$. Теперь можно определить сумму fs^{-1} и gt^{-1} как $(ft' + gs')(st')^{-1}$.

Задача 4. Проверьте, что таким образом $\mathcal{C}[S^{-1}]$ превращается в аддитивную категорию.

Конечно, можно рассматривать левые условия Оре, и получить аналогичное описание морфизмов в локализации категории через левые домики.

В категории комплексов, как правило, условия Оре не выполнены.

Задача 5. Приведите примеры, показывающие, что условия Оре 2 и 3 не выполнены в категории комплексов над абелевой категорией.

Однако условия Оре будут выполняться, если перейти к гомотопической категории комплексов. При этом локализация гомотопической категории по квазиизоморфизмам эквивалентна производной категории.

Определим *гомотопическую категорию* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *комплексов* над абелевой категорией $\mathcal{A}$ следующим образом. Объекты $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ – это комплексы над $\mathcal{A}$, а морфизмы в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ – это морфизмы комплексов по модулю морфизмов, гомотопных нулю. Замена в композиции fg морфизмов f или g на гомотопный морфизм меняет композицию на гомотопный морфизм, значит композиция морфизмов в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ корректно определена. Категория $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, очевидно, будет аддитивной, однако она уже не будет абелевой, за исключением тривиальных случаев.

Задача 6. Проверьте, что морфизм $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ не будет инъективным в гомотопической категории комплексов $\mathbb{Z}$-модулей.

Функторы когомологий комплекса H^i пропускаются через гомотопическую категорию, так как гомотопные морфизмы индуцируют одинаковые морфизмы на когомологиях. Поэтому в гомотопической категории корректно определено понятие квазиизоморфизма.

Предложение 3. *Класс квазиизоморфизмов в гомотопической категории* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *комплексов над* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет правым и левым условиям Оре.*

Доказательство. Мы проверим выполнение правых условий Оре. Первое условие очевидно.

Проверим второе, пусть $f\colon X \to Z$ – морфизм комплексов, а $s\colon Y \to Z$ – квазиизоморфизм. Рассмотрим конус $C(s)$ и морфизм $h\colon Z \to C(s)$. Теперь возьмём в качестве $t\colon Z' \to X$ естественный морфизм $C(hf)[-1] \to X$. Так как s – квазиизоморфизм, из длинной точной последовательности когомологий, связанной с $0 \to Z \to C(s) \to Y[1] \to 0$ получаем, что $C(s)$ ацикличен. А из длинной точной последовательности когомологий, связанной с $0 \to C(s) \to C(hf) \to X[1] \to 0$ получаем, что t – квазиизоморфизм.

Теперь построим морфизм $g\colon C(hf)[-1] \to Y$, такой что sg гомотопно ft. Имеется длинная точная последовательность морфизмов по модулю гомотопии:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(C(hf)[-1], Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(C(hf)[-1], Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(C(hf)[-1], C(s) \to \ldots$$

Морфизм $ft\colon C(hf)[-1] \to Z$ переходит в ноль, так как hft гомотопно нулю по одной из задач первого листочка. Значит, требуемый морфизм найдётся.

Проверим третье условие Оре. Так как гомотопическая категория аддитивна, достаточно проверить, что для данного морфизма f из существования $s \in S$ такого, что $sf = 0$, вытекает существование $t \in S$ такого, что $ft = 0$. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{s} Z$ – морфизмы, sf гомотопно нулю, $s \in S$. Снова рассмотрим конус s и канонический морфизм $h\colon C(s)[-1] \to Y$ Длинная точная последовательность гомотопических морфизмов

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, C(s)[-1]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \to \ldots$$

показывает, что найдётся $f'\colon X \to C(s)[-1]$ такой, что hf' гомотопно f. Возьмём в качестве t канонический морфизм $C(f')[-1] \to X$. Тогда t – квазиизоморфизм, так как $C(s)$ ацикличен, и $ft \sim hf't \sim 0$ по задаче из первого листочка. □

Наконец, остаётся проверить, что локализация гомотопической категории по квазиизоморфизмам эквивалентна производной категории.

Предложение 4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– абелева категория. Тогда локализация* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *по квазиизоморфизмам эквивалентна* $\mathcal{D}(A)$.

Доказательство. Обозначим временно локализацию $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ по квазиизоморфизмам через $\widetilde{Q}\colon \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, а естественный функтор $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}(\mathcal{A})$ обозначим через H:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, shift right, "F"'] \\
\mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\widetilde{Q}"] \arrow[ur, dashed, "Q'"] & \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \arrow[u, dashed, shift right, "G"']
\end{tikzcd}$$

Во-первых, функтор $\widetilde{Q}H$ переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы, значит по определению $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ существует функтор $F\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, для которого $FQ \cong \widetilde{Q}H$. Во-вторых, согласно лемме 5, локализация Q переводит гомотопные морфизмы в равные, поэтому пропускается через функтор $Q \cong Q'H$. При этом Q' переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы, и по определению $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ существует функтор $G\colon \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такой, что $Q' \cong G\widetilde{Q}$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{Q} \cong FQ'$: функтор H сюръективен на объектах и на морфизмах, и при этом $\widetilde{Q}H \cong FQ'H$. Теперь из универсальности $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ получаем, что $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ и $FG \cong \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})}$. □

Лемма 5. *Пусть* $Q\colon \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *– локализация по квазиизоморфизмам,* f *и* g *– гомотопные морфизмы в* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$*. Тогда* $Q(f) = Q(g)$*.*

Эта лемма – обобщение задачи 2. Её доказательство удобно отложить до момента, когда мы изучим свойства треугольников в гомотопической категории.