Размерность

Насколько длинной может быть проективная резольвента модуля? Как много ненулевых групп Tor может быть между двумя модулями? Насколько сложно устроены модули над заданным кольцом? Ответить на эти вопросы помогает понятие размерности.

Проективной и инъективной размерностями модуля M над кольцом A называются числа

$$\mathrm{pd}(M) = \max\{i \mid \exists N \ \mathrm{Ext}^i(M,N) \neq 0\} \quad \text{и} \quad \mathrm{id}(M) = \max\{i \mid \exists N \ \mathrm{Ext}^i(N,M) \neq 0\}$$

(или бесконечность, если эти числа не существуют).

Примеры:

1. $\mathrm{pd}(M) = 0$ тогда и только тогда, когда M проективен,
2. $\mathrm{pd}(M) \leqslant 1$ для конечно порождённой абелевой группы M,
3. $\mathrm{pd}(\mathsf{k}) = \infty$, где k – тривиальный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x]/(x^2)$,
4. $\mathrm{pd}(\mathsf{k}) = n$, где k – тривиальный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Задача 1. Докажите, что $\mathrm{pd}(M) \leqslant \max_{M' \subset M} \mathrm{pd}(M')$, где максимум берётся по всем конечно порождённым подмодулям.
Задача 2. В точной тройке $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ известны $\mathrm{pd}(M')$ и $\mathrm{pd}(M'')$. Что можно сказать о $\mathrm{pd}(M)$?

Оказывается, размерностью модуля ограничиваются длины его резольвент.

Лемма 1. *У модуля M есть проективная резольвента из n членов* $\Leftrightarrow \mathrm{pd}(M) < n$.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно, докажем $\Leftarrow$ по индукции. Случай $n = 1$ очевиден, пусть $\mathrm{pd}(M) > 0$. Переход индукции: пусть $0 \to K \to F \to M \to 0$ – накрытие модуля M свободным модулем F. Из длинной точной последовательности $\mathrm{Ext}^i(-, N)$ для произвольного N получаем: $\mathrm{pd}(K) = \mathrm{pd}(M) - 1$. Значит, у K есть резольвента $n-1$ из члена. Приписывая её к F, получим резольвенту M из n членов. □

Тем самым, проективная размерность модуля – это длина его минимальной проективной резольвенты минус один. Заметим, что мы на самом деле доказали несколько больше: а именно, что если строить проективную резольвенту для модуля с $\mathrm{pd}(M) = n$ как угодно, то на n-м шаге она сама собой построится.

Глобальной размерностью $\mathrm{gldim}(A)$ кольца A называется максимум проективных размерностей всех A-модулей. Как нетрудно видеть, он совпадает с максимумом инъективных размерностей всех A-модулей. В частности, все модули над A проективны $\Leftrightarrow$ все модули над A инъективны.
Задача 3. a) Пусть A – целостное кольцо главных идеалов. Покажите, что любой подмодуль свободного A-модуля свободен.

b) Покажите, что глобальная размерность кольца A равна максимуму проективных размерностей всех конечно порождённых A-модулей.

c) Найдите глобальную размерность кольца $\mathbb{Z}$.

Вычислим глобальную размерность кольца многочленов. Основной инструмент здесь – следующая

Лемма 2. *Пусть A – кольцо, M – модуль над кольцом $A[x]$. Покажите, что*

$$\operatorname{pd}_A(M) \leqslant \operatorname{pd}_{A[x]}(M) \leqslant \operatorname{pd}_A(M) + 1.$$

При этом если $xM = 0$, то достигается равенство справа.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $A[x]$-модулей

$$0 \to A[x] \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes x - x\otimes 1} A[x] \otimes_A M \to M \to 0. \tag{1}$$

Она точна: действительно, элементы двух левых модулей – это многочлены с коэффициентами в M, и точность можно проверить вручную. По задаче , $\operatorname{pd}_{A[x]}(M) \leqslant \operatorname{pd}_{A[x]}(A[x]\otimes_A M)+1$. С другой стороны, если $P_\bullet$ – проективная резольвента для M над A, то $A[x]\otimes_A P_\bullet$ – проективная резольвента для $A[x]\otimes_A M$ над $A[x]$. Поэтому $\operatorname{pd}_{A[x]}(A[x]\otimes_A M) \leqslant \operatorname{pd}_A(M)$, это доказывает правое неравенство леммы. Левое почти очевидно: если у M есть проективная резольвента над $A[x]$ длины n, то она же будет проективной резольвентой M и над A той же длины.

Пусть $xM = 0, \operatorname{pd}_A M = n$, а N – такой A-модуль, что $\operatorname{Ext}^n(M, N) \neq 0$. Тогда последовательность (1) примет вид

$$0 \to A[x] \otimes_A M \xrightarrow{x} A[x] \otimes_A M \to M \to 0.$$

В длинной точной последовательности функторов $\operatorname{Ext}^i_{A[x]}(-, N)$ будет фрагмент

$$\operatorname{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}^{n+1}_{A[x]}(M, N) \to 0,$$

где левая стрелка изоморфна

$$\operatorname{Ext}^n_A(M, N) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^n_A(M, N).$$

Здесь умножение на x – нулевое, т.к. умножение на x аннулирует второй аргумент N. Значит, $\operatorname{pd}_{A[x]}(M) = \operatorname{pd}_A(M) + 1$. ☐

Задача 4. Проверьте, что в неравенстве леммы достигается равенство слева, если модуль M индуцирован с некоторого A-модуля.

Следствие 3. *Глобальная размерность кольца $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, где k – поле, равна n.*

Иными словами, любой $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$-модуль имеет проективную резольвенту длины $n + 1$. В классической терминологии это – решение проблемы Гильберта о сизигиях.

Изучим кольца малых глобальных размерностей. Самый простой случай – размерность 0. Такие кольца вообще можно явно описать.

Напомним, модуль называется *неприводимым* или *простым*, если у него нет нетривиальных подмодулей. Модуль называется *полупростым*, если он есть прямая сумма простых. Кольцо A мы будем называть *полупростым*, если любой A-модуль полупрост.

Примеры: поле – полупростое кольцо. Алгебра матриц над полем полупроста. Групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ конечной группы полупроста. Полупросто ли счётное произведение полей $\prod \mathsf{k}$?

Задача 5. a) Докажите, что подмодуль и фактормодуль полупростого модуля полупросты. b) Докажите, что кольцо A полупросто $\Leftrightarrow$ A полупросто как модуль над собой. c) Докажите, что множество классов изоморфизма простых модулей над полупростым кольцом конечно. Верно ли это без предположения о полупростоте?

Предложение 4. *Следующие условия эквивалентны:*

- *A имеет глобальную размерность 0;*
- *A полупросто;*
- *A изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Несложно видеть, что любой подмодуль выделяется прямым слагаемым. Действительно, любая точная тройка расщепима, т.к. $\mathrm{Ext}^1(M, N) = 0$. Покажем, что A полупросто как A-модуль. Действительно, начнём раскладывать A в прямые суммы подмодулей. Если за конечное число шагов не получится прямой суммы простых, то получится разложение в счётную прямую сумму $A = \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Пусть при этом $1 \in \oplus_{i=1}^n M_i$, тогда $A = A \cdot 1 \subset A \oplus_{i=1}^n M_i = \oplus_{i=1}^n M_i$ – противоречие.

$2 \Rightarrow 3$. Разложим A в прямую сумму простых модулей (она будет конечной), сгруппируем изоморфные: $A \cong \oplus S_i^{\oplus n_i}$. Посчитаем кольцо эндоморфизмов A как левого модуля над собой. Получится $\mathrm{End}_A(A) = \prod \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathrm{End}_A(S_i))$. При этом $T_i = \mathrm{End}_A(S_i)$ – тело, так как по лемме Шура ненулевые эндоморфизмы простого модуля обратимы. С другой стороны, $\mathrm{End}_A(A) = A^{op}$. Получаем $A \cong (\prod \mathrm{Mat}_{n_i}(T_i))^{op} \cong \prod \mathrm{Mat}_{n_i}(T_i^{op})$.

$3 \Rightarrow 2$. Достаточно показать, что одно кольцо $\mathrm{Mat}_n(T)$ матриц над телом полупросто. Действительно, как левый модуль $\mathrm{Mat}_n(T) \cong V^{\oplus n}$, где $V = T^n$ – стандартный простой модуль.

$2 \Rightarrow 1$. Любой простой A-модуль проективен как прямое слагаемое A. А значит, все A-модули проективны как прямая сумма простых. □

Задача 6. Сколько неизоморфных простых модулей существует над кольцом $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{H}\times \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$?

Теперь перейдём к кольцам глобальной размерности 1. Кольца глобальной размерности 0 или 1 называются *наследственными.*

Лемма 5. *Кольцо A наследственно $\Leftrightarrow$ любой подмодуль проективного проективен $\Leftrightarrow$ любой фактормодуль инъективного инъективен.*

На первой лекции мы выяснили, что любой комплекс над полупростым кольцом квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий. На самом деле, это верно для комплексов модулей над любым наследственным кольцом.

Предложение 6. *Пусть $K^\bullet$ – комплекс над кольцом глобальной размерности $\leqslant 1$. Тогда $K^\bullet$ квазиизоморфен комплексу с нулевыми дифференциалами.*

Вначале докажем лемму.

Лемма 7. *Любой комплекс проективных модулей над наследственным кольцом изоморфен прямой сумме комплексов вида*

$$\ldots 0 \to K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \to 0 \ldots, \tag{2}$$

где d^i инъективен.

Доказательство предложения 6. Оно следует из того, что комплекс вида (2) квазиизоморфен своим когомологиям и того, что любой комплекс квазиизоморфен комплексу с проективными членами. □

Задача 7. Постройте квазиизоморфизм из комплекса с проективными членами в комплекс $\ldots \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \ldots$ над кольцом $\mathsf{k}[x]$.

Задача 8 (формулы универсальных коэффициентов). Пусть $K_\bullet$ – комплекс проективных модулей над наследственным кольцом, L – ещё один модуль. a) Тогда

$$H^n(\mathrm{Hom}(K_\bullet, L)) = \mathrm{Hom}(H_n(K_\bullet), L) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(K_\bullet), L).$$

b) Получите аналогичную формулу для $L \otimes K_\bullet$.

c) Как вычислить гомологии многообразия X с коэффициентами в абелевой группе M, если известны $H_i(X, \mathbb{Z})$?

Есть и другие, негомологические способы определять размерность кольца. Например у Атьи-Макдональда доказывается эквивалентность следующих определений размерности коммутативного нётерова локального кольца Aс максимальным идеалом $\mathfrak{p}$:

1. $\dim A$ – максимальная длина n цепочки $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ различных простых идеалов в A (это называется *размерностью Крулля* Krdim A и имеет смысл не только для локальных колец).

2. $\dim A$ – степень многочлена $P(t) = \dim_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^t/\mathfrak{p}^{t+1})$ плюс 1.

3. $\dim A$ – минимальное число образующих какого-либо $\mathfrak{p}$-примарного идеала.

Для определения размерности кольца, которое не обязательно локально, естественно взять максимум размерностей его локальных колец. Легко видеть, что определение размерности по Круллю при этом оказывается корректным. Верно это и для глобальной размерности:

Задача 9. Пусть A – нётерово коммутативное кольцо. Тогда $\mathrm{gldim}(A) = \max_{\mathfrak{p}}\ \mathrm{gldim}(A_{\mathfrak{p}})$, где максимум берётся по простым идеалам $\mathfrak{p} \subset A$.

Связь между глобальной размерностью кольца и размерностью Крулля описывается замечательной теоремой Серра:

Теорема 8. *Пусть A – локальное нётерово коммутативное кольцо. Тогда:*

1. *если A регулярно, то* $\mathrm{gldim}\, A = \mathrm{Krdim}\ A < \infty$,

2. *если A не регулярно, то* $\mathrm{gldim}\, A = \infty$.

Геометрический смысл этой теоремы такой: гладкость точки на алгебраическом многообразии соответствует конечности глобальной размерности локального кольца в этой точке.

Рассмотрим теперь класс некоммутативных алгебр, важный в теории представлений – алгебры, связанные с колчанами.

Колчаном называется ориентированный граф. По колчану Q построим алгебру $A(Q)$ над любым полем k . Как векторное пространство, $A(Q)$ порождена ориентированными путями в Q (в частности, для любой вершины v будет тривиальный путь 1_v из v в v длины 0). Умножение определим так: произведение двух путей равно их “склейке”, если конец одного совпадает с началом другого, и равно нулю иначе. Получится ассоциативная алгебра, единицей будет $\sum_v 1_v$, если число вершин конечно.

Задача 10. a) Докажите, что левый модуль над $A(Q)$ – это набор k-векторных пространств M_v, где v пробегает множество вершин, и линейных отображений $f_e \colon M_v \to M_u$ для каждого ребра e из v в u. Пусть теперь Q конечен и не содержит ориентированных циклов. b) Опишите простые модули над $A(Q)$. Разложите $A(Q)$ в прямую сумму главных левых идеалов. c) Найдите глобальную размерность $A(Q)$.