

Экзамен

1. Пусть $f^\bullet: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ и $g^\bullet: L^\bullet \rightarrow K^\bullet$ – гомотопически обратные морфизмы комплексов, $gf = 1_K + dh_K + h_Kd$, $fg = 1_L + dh_L + h_Ld$. Выпишите явно гомотопию между нулевым и тождественным эндоморфизмами комплекса $C(f)^\bullet$.
2. (a) Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – функтор между аддитивными категориями. Докажите, что F аддитивен тогда и только тогда, когда $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ для всех M, N .
 (b) Доказали? А N. утверждает, что нашёл контрпример: Возьмём в качестве \mathcal{C} категорию счётномерных векторных пространств над \mathbb{C} (она аддитивна), рассмотрим функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $F(M) = M \otimes_{\mathbb{C}} M$ (он не аддитивен). Однако $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ – и то, и другое счётномерно. В чем дело?
3. Пусть $A = \mathbb{C}[x, y]$ – кольцо, а M – A -модуль. Докажите, что функтор

$$F(N) = \text{Ext}_A^2(M, N): A\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$$

точен справа. Вычислите соответствующие производные функторы в случае $M = \mathbb{C}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$, $N = \mathbb{C}[x, y]/(x, y)$.

4. (a) Пусть A – коммутативное нётерово кольцо конечной глобальной размерности, а M – конечно порождённый A -модуль. Докажите, что M проективен тогда и только тогда, когда $\text{Ext}^i(M, A) = 0$ при $i > 0$.
 (b) Пусть $A = \mathbb{C}[x, y]$ – кольцо, а $I = \{f \in A \mid f(0, 1) = f(0, -1) = 0\}$ – идеал в A . Классифицируйте модули M над A , для которых существует точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$. Какие из них проективны?
5. Пусть G – группа порядка n , а M – G -модуль. Докажите, что $n \cdot H_i(G, M) = 0$ при $i > 0$.
6. Покажите, что прямое слагаемое выделенного треугольника в триангулированной категории – выделенный треугольник.
7. Пусть $F: \text{Sh}_X(\mathcal{A}b) \rightarrow \text{PreSh}_X(\mathcal{A}b)$ – тавтологический функтор из пучков абелевых групп на топологическом пространстве X в предпучки. Вычислите производные функторы от F .

Экзамен письменный домашний. Решения задач рекомендуется записывать ясно, понятно и полностью (но без ненужных подробностей). Можно пользоваться фактами, сформулированными в листках (в т.ч. задачами, если это не противоречит здравому смыслу), прочие факты нужно объяснять. Работы сдавать до 21.01.2011 включительно в учебную часть. Вопросы можно задать, написав письмо по адресу alexelagin@rambler.ru.