

Избранные главы теории динамических систем

Курс-семинар под руководством В. А. Клепцына и И. В. Щурова

Аннотация

Теория динамических систем активно развивается со времен А. Пуанкаре. Она изучает качественные свойства решений дифференциальных уравнений и итераций отображений, используя результаты и подходы из различных областей математики — вещественного и комплексного анализа, теории слоений, теории вероятностей, спектральной теории, а также собственные красивые и глубоко разработанные методы — гиперболическую и частично гиперболическую теорию, теорию нормальных форм, символическую динамику и др. Задача курса — познакомить слушателей с понятиями и приёмами современной теории динамических систем, дать в руки инструментарий для проведения самостоятельных исследований.

Курс рассчитан на студентов 2-5 курсов и аспирантов. Лекции-доклады будут читаться участниками семинара под руководством Ю. С. Ильяшенко «Динамические системы».

Предполагается, что слушатели по желанию смогут подготовить самостоятельные доклады по некоторым из тем, перечисленных ниже, и представить их на курсе-семинаре.

Также в конце курса будет организован письменный экзамен. (В случае, если слушателем был подготовлен и прочитан доклад, он может быть учтён при выставлении итоговой оценки.)

Примерная программа

Планируется по возможности обсудить перечисленные ниже темы, однако окончательная программа и порядок следования тем будет уточняться по ходу работы.

Отображения окружности

Число вращения, классификация Пуанкаре, теорема Данжуа, пример Данжуа, контроль искажения, действие группы диффеоморфизмов, показатели Ляпунова.

Нормальные формы

Метод последовательных приближений. Линеаризация гиперболической особой точки на прямой. Теорема Пуанкаре-Дюлака. КАМ-теория: гладкость сопряжения для диффеоморфизмов окружности при диофантовом числе вращения.

Полиномиальные уравнения в $\mathbb{C}P^2$

Слоение, заданное полиномиальным уравнением в \mathbb{C}^2 , проективизация, бесконечно удаленная прямая, особые точки на бесконечно удаленной прямой, монодромия.

Линейные системы с комплексным временем

Регулярные, фуксовы, иррегулярные особые точки. Уравнение Риккати. Ветвление решений. Монодромия. Теорема Левеля: нормальная форма фуксовой особой точки.

Гиперболические системы

Устойчивое и неустойчивое слоения. Лемма об отслеживании. Условия конусов. Структурная устойчивость диффеоморфизмов Аносова. Гиперболические множества. Сохранение гиперболических множеств.

Символическая динамика

Пространства символических последовательностей, сдвиг Бернулли, сдвиг Маркова, отображение судьбы, кодирование растягивающего эндоморфизма, Кодирование диффеоморфизма Аносова

Случайные динамические системы

Стационарная мера, теорема Баксендейла.

Косые произведения

Ступенчатые косые произведения. Гладкая реализация. Возмущения. Частичная гиперболичность. Гельдеровость сопряжения. Кошмар Фубини. Сильная эргодичность.

Основы метрической теории динамических систем

Спектр. Перемешивание, эргодичность. Эргодическая теорема Бирхгофа-Хинчина. Энтропия. Вариационный принцип.