Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 40

С. Б. Гашков

ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ И ГЕОМЕТРИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2015

УДК 511.2
ББК 22.131
Г24

Гашков С. Б.

Г24 Центры тяжести и геометрия. — М.: МЦНМО, 2015. — 64 с.

ISBN 978-5-4439-0145-9

ББК 22.131

ISBN 978-5-4439-0145-9

1. Центры тяжести плоских фигур и планиметрия

Методы вычисления центров тяжести, или, что то же самое, центров масс (далее для разнообразия используются оба термина), составляют один из важнейших разделов статики и являются самым древним разделом механики (да и физики вообще). Их основы были заложены знаменитым Архимедом. Его подход к этим задачам был в значительной мере геометрическим[1], и с тех пор методы нахождения центров масс простых плоских фигур составляют своеобразный раздел геометрии[2]. Как и саму геометрию, их можно излагать аксиоматически.

Центр масс конечной системы материальных точек

Например, в качестве аксиом можно взять следующие кажущиеся достаточно очевидными утверждения.

Аксиома 0. *У любой конечной системы точек центр масс существует и определен однозначно.*

Аксиома 1. *Центр масс точки совпадает с ней.*

Аксиома 2. *Центр масс системы двух точек с массами m_i делит отрезок, их соединяющий, в отношении $m_1 : m_2$ и расположен ближе к большей массе* (*если они равны, то он находится посередине*).

---

[1] Но он использовал и некоторые физические соображения, например открытый им закон рычага. Ход мысли Архимеда показан в книге известного австрийского физика и философа Эрнста Маха [1], в которой некоторые рассуждения Архимеда Мах критиковал. Кстати, философскую систему, развитую Махом (так называемый махизм), подверг резкой (и во многом несправедливой) критике В. И. Ленин в книге «Материализм и эмпириокритицизм».

[2] Далее мы в значительной степени следуем прекрасному учебнику теоретической механики профессора Московского университета Н. Е. Жуковского [2], написанному в истинно геометрическом стиле. Многие (но не все) излагаемые далее факты взяты из этой книги (но доказательства часто даются другие). К сожалению, в [2], как принято в учебниках, обычно не указываются источники многих несложных результатов, вероятно, известных с давних пор (может быть, даже и Архимеду), а сейчас их установить затруднительно. Кстати, Н. Е. Жуковского за его фундаментальный вклад в аэромеханику В. И. Ленин назвал «отцом русской авиации».

Аксиома 3. *Если множество точек M разбито на два непересекающихся подмножества M_i с суммарными массами m_i и центрами масс A_i, $i = 1, 2$, то центр масс множества M совпадает с центром масс системы из двух точек A_i с массами m_i.*

Этих аксиом достаточно, чтобы вычислить центр масс любого конечного множества точек A_i с массами m_i, $i = 1, \ldots, n$. Для этого можно заменить с помощью аксиомы 3 точки A_1, A_2 на одну точку $A_{1,2}$ с массой $m_1 + m_2$, определив положение точки $A_{1,2}$ с помощью аксиомы 2. Если $n > 2$, то к полученному $(n-1)$-точечному множеству $\{A_{1,2}, A_3, \ldots, A_n\}$ применяем тот же прием и т. д., пока не получим одну точку $A_{1,2,\ldots,n}$ с массой $m_1 + \ldots + m_n$, которая согласно аксиоме 1 является центром масс системы точек A_i, $i = 1, \ldots, n$.

Указанный прием можно, конечно, применять к данному множеству точек различными способами, например, на первом шаге можно вместо точек A_1, A_2 взять любую пару различных точек A_i, A_j, но согласно аксиоме 1 результат от порядка выбора точек не зависит.

Задача 1. Сколько существует различных способов нахождения центра масс системы из n точек?

Независимость результата от выбранного порядка выполнения указанных операций выглядит не столь уж и очевидной. Например, при нахождении тремя возможными способами центра тяжести системы из трех точек равной массы получается «бесплатно» известная всем школьникам теорема о пересечении медиан в треугольнике (см. рис. 1, 2). Действительно, центр масс лежит на каждой из медиан, значит, и на их пересечении, поэтому они пересекаются, а пересекаться они могут только в одной точке. Эта точка — одна из самых важных замечательных точек треугольника.

Используя понятие центра масс, можно легко доказать многие геометрические теоремы. Например, поместив в вершины треугольника массы, равные 2, и заменяя каждую из них на две единичные массы, сосредоточенные в той же вершине, заметим, что центр масс полученной системы из шести точек по-прежнему находится в точке пересечения медиан. Заменяя каждую пару точек, лежащих в разных вершинах, на точку с массой 2, лежащую в середине стороны, соединяющей эти вершины, получим три точки, лежащие в вершинах срединного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника (см. рис. 3). Согласно аксиоме 2 точка пересечения медиан срединного треугольника совпадает с точкой пересечения

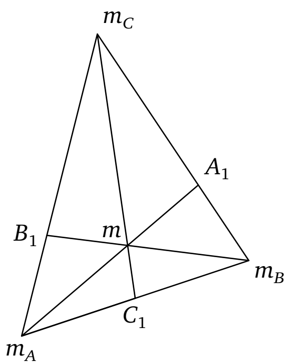

Рис. 1. Центр трех точечных масс

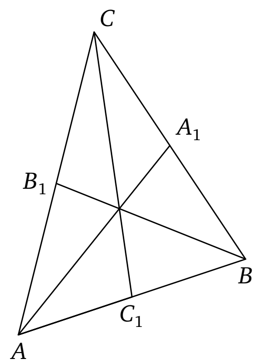

Рис. 2. Медианы треугольника и его центр масс

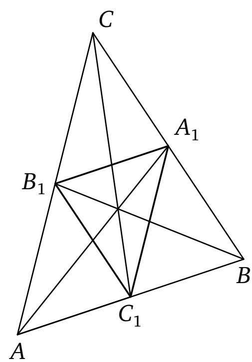

Рис. 3. Срединный треугольник

медиан исходного треугольника (можно, конечно, еще доказать, что эти два треугольника гомотетичны с коэффициентом два относительно их общей точки пересечения медиан).

2. Центры тяжести и векторная алгебра

Если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из нее радиус-векторы v_i в точки A_i, то радиус-вектор $v = \overline{OA}$, где A — найденный выше центр масс системы точек A_i с массами m_i, вычисляется следующим образом:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i = \frac{m_i}{m}, \quad m = m_1 + \ldots + m_n.$$

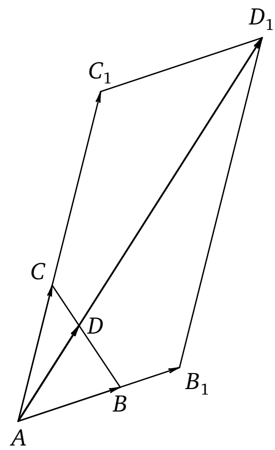

Рис. 4. Вычисление центра тяжести
двух точечных масс и сложение векторов

Из этой формулы видно, что в случае равных масс их центр тяжести не зависит от величины массы. Далее для краткости будем называть его *центроидом*[3].

Приведенную выше формулу легко доказать, если воспользоваться свойствами векторов. Сначала докажем ее для $n=2$ (т. е. выведем аксиому 2 из известных свойств векторов).

На рис. 4 изображены векторы

$$v_1 = \overline{AB}, \quad v_2 = \overline{AC}, \quad m_1 v_1 = \overline{AB_1}, \quad m_2 v_2 = \overline{AC_1},$$

где

$$m_1 = \frac{|AB_1|}{|AB|}, \quad m_2 = \frac{|AC_1|}{|AC|}$$

согласно определению умножения вектора на число, и

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \overline{AD_1},$$

где $AB_1D_1C_1$ — параллелограмм согласно правилу сложения векторов. Согласно аксиоме 2 центр тяжести двух масс m_1 и m_2, расположенных в точках B, C, находится в такой точке D отрезка BC, что $CD : DB = m_1 : m_2$, откуда имеем $CD : CB = m_1 : (m_1 + m_2)$, значит, вектор $\overline{CD}$ равен

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\overline{CB} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\overline{AB} - \overline{AC}),$$

[3] Например, центроидом треугольника является точка пересечения его медиан.

поэтому

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\overline{AB} - \overline{AC}) =$$
$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\overline{AB} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overline{AC} = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2,$$

что и доказывает формулу при $n = 2$.

Для доказательства формулы

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i = \frac{m_i}{m}, \quad m = m_1 + \ldots + m_n,$$

в общем случае применим индукцию. Базис ($n = 2$) уже доказан. Его можно применить и для выполнения шага индукции. Покажем, что независимо от порядка выполнения указанных выше операций получится данная выше формула для центра масс. Без ограничения общности можно считать, что точки A_1 и A_2 заменяются вначале точкой $A_{1,2}$ массы $M_1 = m_1 + m_2$, расположенной в их центре тяжести. Согласно базису индукции этот центр тяжести находится в конце радиус-вектора

$$V_1 = \frac{m_1}{M_1}v_1 + \frac{m_2}{M_1}v_2.$$

Для нахождения центра масс системы точек $\{A_1, \ldots, A_n\}$ согласно аксиоме 2 нужно найти центр масс системы точек $\{A_{1,2}, A_3, \ldots, A_n\}$. Согласно предположению индукции он находится в конце радиус-вектора

$$\frac{1}{m}(V_1 M_1 + v_3 m_3 + \ldots + v_n m_n).$$

Но

$$\frac{1}{m}V_1 M_1 = \frac{1}{m}(m_1 v_1 + m_2 v_2),$$

значит,

$$\frac{1}{m}(V_1 M_1 + v_3 m_3 + \ldots + v_n m_n) = \frac{1}{m}(m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n).$$

С помощью доказанной формулы центр масс любой конечной системы точек можно вычислить чисто алгебраически. Более того, указанную формулу можно взять в качестве определения центра масс и тогда указанные выше аксиомы превратятся в теоремы элементарной геометрии. Точнее, если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из нее радиус-векторы v_i в точки A_i, то центр масс данной системы точек с массами m_i определяется радиус-вектором $v = OA$, где

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i = \frac{m_i}{m}, \quad m = m_1 + \ldots + m_n,$$

и точка A при этом не зависит от выбора точки O (начала координат). Другое определение центра масс данной системы точек таково: это такая точка A, для которой радиус-векторы V_i, направленные из точки A в точку A_i, удовлетворяют равенству

$$m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n = 0.$$

Но и здесь надо доказывать существование и единственность такой точки.

Доказательства аксиом 0–3 удобно проводить, пользуясь не обычной евклидовой аксиоматикой геометрии [4], а векторной аксиоматикой, в которой все понятия геометрии формулируются на языке векторов и операций над ними [5].

Задача 2. Докажите равносильность обоих определений

Указание. Используйте векторную алгебру.

Применяя второе из приведенных выше определений центра масс, можно доказать аксиому 2 проще, чем сделано выше.

Но верно и обратное, т. е. из указанных аксиом для понятия центра масс можно вывести все теоремы геометрии, в которых не используются метрические понятия: расстояние между точками и величина угла между прямыми [6].

Например, сочетательный закон сложения трех векторов можно вывести из теоремы о точке пересечения медиан в треугольнике, которая вытекает из теоремы о центре тяжести трех точек с равными массами. На языке центров тяжести можно определить понятие отрезка между двумя точками: это просто множество всех позиций, которые может занимать центр тяжести системы из этих двух точек при всех возможных значениях масс этих точек. Если n точек лежат на одной прямой, то множество всех позиций, которые может занимать центр тяжести системы из этих точек при всех возможных значениях масс, также образует отрезок (верно, конечно, и обратное утверждение). Если массы этих точек равны, а сами точки распределены на этом от-

[4] Строго говоря, сам Евклид не оставил безупречной аксиоматики, и за него работу по доведению аксиоматики геометрии до современных стандартов строгости проделал знаменитый немецкий математик Давид Гильберт в своей книге «Основания геометрии».

[5] Эту аксиоматику предложил ученик Гильберта, немецкий математик Герман Вейль.

[6] Этот фрагмент геометрии, в котором не используются метрические понятия, называется аффинной геометрией.

резке равномерно, т. е. расстояния между соседними точками равны, то центр тяжести лежит точно в середине этого отрезка. Если не все из n точек лежат на одной прямой, то множество всевозможных положений центра масс этой системы точек образует выпуклый m-угольник, который совпадает с выпуклой оболочкой данной системы точек[7]. В частности, если данные n точек лежат в вершинах выпуклого n-угольника, то его выпуклая оболочка с ним совпадает[8]. При $n = 3$ получается определение треугольника на языке центров масс.

Барицентрические координаты

Произвольную точку внутри треугольника можно рассматривать как центр подходящим образом подобранных масс m_i, $i = 1, 2, 3$, помещенных в его вершины. Набор чисел $(m_1 : m_2 : m_3)$, очевидно, однозначно определяет соответствующий центр масс (согласно доказанной выше формуле на векторном языке он задается радиус-вектором $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, где $\alpha_i = m_i/m$, $m = m_1 + m_2 + m_3$, v_i — радиус-векторы вершин треугольника). Этот набор называется *барицентрическими координатами* точки. Они, очевидно, определены не однозначно, а с точностью до умножения на произвольную константу[9]. Это свойство барицентрических координат называется *однородностью*[10], и во многих случаях оно оказывается очень удобным. Для того чтобы определить координаты точек на границе треугольника, удобно ввести понятие нулевой массы. Тогда, например, координатами вершин треугольника будут $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, а координаты точки, делящей сторону, соединяющую первую вершину со второй, в отношении $a : b$ (считая от первой вершины), будут $(b : a : 0)$.

Задача 3. Докажите, что барицентрические координаты точки пересечения медиан равны $(1 : 1 : 1)$.

Барицентрические координаты можно сделать однозначно определенными, если наложить на них дополнительное условие $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Такие координаты иногда называют *ареальными*[11]. При-

---

[7] Те, кто еще не слышал, что такое выпуклая оболочка, могут считать приведенное предложение определением этого понятия.

[8] Тем самым появляется определение выпуклого n-угольника на языке центров масс.

[9] При умножении масс на одно и то же число положение центра масс не меняется.

[10] Именно из-за него в определении барицентрических координат вместо запятых стоят двоеточия.

[11] От слова area — площадь.

чина названия проста: если треугольник имеет площадь единица и точка внутри него имеет ареальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то площади трех треугольников, на которые он разбивается отрезками, соединяющими эту точку с вершинами, в точности равны $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (α_i — площадь треугольника, противоположного вершине с массой m_i, а сумма всех α_i равна единице).

Задача 4. Докажите это свойство ареальных координат.

Указание. Для доказательства достаточно посмотреть на рис. 1, на котором барицентрические координаты точки внутри треугольника есть $(1:2:3)$, а ареальные — $(1/6, 1/3, 1/2)$. Прямые, проходящие через эту точку, делятся ей и треугольником в отношениях $6:1$, $3:1$, $2:1$ (согласно правилу вычисления центра масс), высоты большого треугольника и высоты малых треугольников, опущенные на ту же самую сторону, также относятся друг к другу как $6:1$, $3:1$, $2:1$ соответственно, и из этого вытекает нужное нам отношение площадей.

Задача 5. Докажите, что барицентрические координаты точки пересечения биссектрис треугольника со сторонами a, b, c равны $(a:b:c)$.

Указание. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности. Она разбивает данный треугольник на три треугольника. Их высоты, опущенные из центра окружности на стороны данного треугольника, равны. Поэтому отношение площадей этих трех треугольников равно $a:b:c$.

Барицентрические (и ареальные) координаты можно приписать (если хочется) и любой точке плоскости вне треугольника, если для их определения использовать отрицательные массы[12].

Барицентрические координаты можно ввести аналогичным образом в трехмерном (и даже произвольном n-мерном) пространстве, но это далее не понадобится.

О барицентрических координатах (открытых немецким математиком А. Ф. Мёбиусом) можно написать целую книгу (сам Мёбиус и написал). Им посвящена значительная часть книги [3]. В ней описаны, в частности, применения этих координат в химии и металлургии (для описания смесей, сплавов и растворов), колориметрии

[12] С физической точки зрения отрицательные массы бессмысленны, но здесь они используется чисто формально.

(для задания произвольного цвета используют так называемые RGB-координаты) [13], популяционной генетике (интерпретация закона Харди — Вейнберга) и, естественно, в математике (подразделения полиэдров в топологии, интерполяция функций многих переменных).

3. Центроид четырехугольника и параллелограмм Вариньона

Для того чтобы найти центр тяжести четырех равных масс, можно применить следующий прием. Разбиваем эти массы произвольным образом на две пары, заменяем каждую пару точкой удвоенной массы, расположенной точно посередине между точками этой пары, тогда задача сведется к нахождению центра масс системы из двух построенных точек. Так как их массы равны, искомый центр находится ровно посередине между построенными серединами. Указанное построение работает всегда, в том числе и когда одна или несколько точек совпадают. В этом случае задачу можно рассматривать как нахождение центра тяжести трех или двух точек уже с не обязательно равными массами, но эту задачу также можно решить указанным выше способом.

Если все четыре точки различны, то они образуют четырехугольник: четыре из шести пар точек образуют его стороны, а две — диагонали [14]. Отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, иногда называют *бимедианами*. К двум бимедианам можно добавить отрезок, соединяющий центры диагоналей. Тогда из приведенного выше рассуждения вытекает, что все три указанных отрезка (две бимедианы и отрезок, соединяющий середины диагоналей) пересекаются в одной точке — центре тяжести равных масс, расположенных в вершинах четырехугольника, и эта точка служит их общим центром. Четырехугольник, образованный серединами сторон данного четырехугольника, имеет указанные бимедианы в качестве диагоналей. Отсюда следует, что этот срединный четырехугольник является параллелограммом (см. рис. 5). Он называется *параллело-*

[13] Любой цвет есть результат смешения в определенной пропорции трех цветов, на что указывал еще М. В. Ломоносов.

[14] Формально говоря, таких четырехугольников будет несколько, но мы выберем из них несамопересекающийся, он определен однозначно, но не обязан быть выпуклым и может вырождаться в треугольник в том смысле, что две соседние стороны могут лежать на одной прямой.

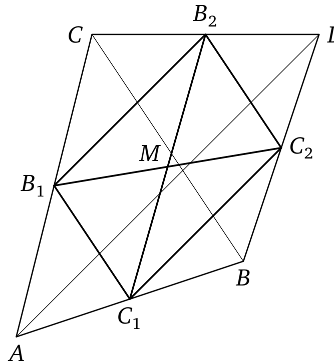

Рис. 5. Параллелограмм Вариньона
и центр четырех равных масс

граммом Вариньона в честь французского математика и механика XVII века. Из сказанного выше следует, что середина отрезка, соединяющего середины диагоналей, совпадает с центром параллелограмма Вариньона.

Задача 6. Докажите, что стороны параллелограмма Вариньона параллельны диагоналям данного четырехугольника и равны их половинам.

Указание. Примените теорему о средней линии треугольника.

Задача 7. Докажите, что площадь четырехугольника вдвое больше площади его параллелограмма Вариньона.

Указание. Треугольники, отсекаемые от четырехугольника его параллелограммом Вариньона, подобны с коэффициентом подобия $k = 2$ треугольникам, отсекаемым от него диагоналями. В случае невыпуклого четырехугольника следует использовать не только сложение, но и вычитание площадей.

Задача 8. Докажите, что центр тяжести вершин четырехугольника (центр его параллелограмма Вариньона) совпадает с точкой пересечения диагоналей тогда и только тогда, когда данный четырехугольник — параллелограмм.

Указание. Центр параллелограмма Вариньона совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры диагоналей. Если диагонали в точке пересечения не делятся обе пополам, то указанная середина не совпадает с точкой пересечения диагоналей, а если обе делятся пополам, то указанная середина вырождается в их точку пересечения. Четырехугольник, у которого обе диагонали делятся точкой пересечения пополам, является параллелограммом.

4. Как найти центры тяжести треугольника и многоугольников

Возвращаясь к понятию центра масс, рассмотрим вопрос, как находить центры масс бесконечных систем точек. Например, как найти центр масс отрезка данной массы m? Если разбить его n точками на равные отрезки и в каждую поместить массу m/n, то центр масс такой системы находится в центре отрезка независимо от n. Естественно предположить, что центр отрезка с равномерно распределенной по нему массой m также находится в его центре. Мы примем этот факт за аксиому. В отличие от аксиом, касающихся конечных систем точек, доказать это утверждение в рамках элементарной геометрии затруднительно, хотя бы потому, что неясно, как точно определить понятие равномерно распределенной массы. Попытка дать такое определение приводит к парадоксам, связанным с тем, что неясно, как в этом случае определить массу произвольной точки отрезка: если она всегда больше нуля, то отрезок должен иметь бесконечную массу, а если она всегда равна нулю, то и масса отрезка нуль. Выход из этих парадоксов дает теория пределов в рамках дифференциального и интегрального исчисления. В интегральном исчислении дается определение центра тяжести достаточно произвольных фигур и тел с достаточно произвольным, а не только равномерным распределением масс в них, и в этом определении используется интеграл. Далее мы будем рассматривать только простейшие фигуры и тела, например многоугольники, и только равномерное распределение масс.

Для того чтобы найти центр тяжести треугольника, можно его представить состоящим из попарно непересекающихся отрезков, параллельных одной из сторон. Заменяя каждый из этих отрезков на точку с той же массой (можно считать, например, что масса отрезка равна его длине), сводим задачу к нахождению центра масс системы точек, лежащих на отрезке (используем при этом соответствующее обобщение аксиомы 2). Как отмечалось выше, этот центр масс лежит на этом отрезке — медиане треугольника [15]. Найти его сразу затруднительно, но это и не нужно — ведь такое же рассуждение показывает, что он лежит и на двух других медианах тоже, а значит, совпадает с их точкой пересечения [16] (см. рис. 2).

Аналогично доказывается, что центр масс трапеции с равномерно распределенной массой лежит на отрезке, соединяющем середины параллельных сторон трапеции. Как его найти точно, укажем чуть позднее.

После того как найден центр тяжести треугольника, можно найти и центр тяжести произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника. Для этого его достаточно произвольным образом разрезать на треугольники. Проще всего это сделать, только проводя диагонали в многоугольнике, не допуская их самопересечений в точках, отличных от его вершин, до тех пор пока это возможно. В результате получится разбиение n-угольника на $n-2$ треугольника. Такая операция называется *триангуляцией*.

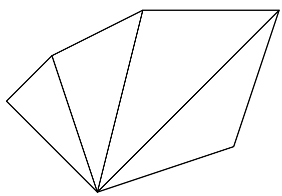

Рис. 6. Триангуляция шестиугольника

Задача 9. Докажите, что при любой описанной выше триангуляции получится $n-2$ треугольника.

Указание. Рассмотрите сумму углов треугольников и сравните ее с суммой углов n-угольника.

Задача 10 (трудная комбинаторная). Если n-угольник выпуклый, сколько различных таких триангуляций он имеет?

---

[15] Строго говоря, выше это утверждалось для конечных систем точек, а здесь система бесконечная, да и массы разные, т. е. фактически получилась задача о нахождении центра тяжести отрезка с неравномерным распределением масс (плотность распределения, однако, очень простая — задается линейной функцией от координаты точки).

[16] Интересно, что такое рассуждение, восходящее к Архимеду, не требует никаких вычислений, а применение формул для центра масс из интегрального исчисления приводит к несложному, но все же двойному интегралу.

Указание. Ответом к этой задаче, впервые решенной Эйлером, является последовательность чисел, сейчас называющихся числами Каталана (о них см., например, [9]).

Возьмем любую триангуляцию многоугольника (не обязательно рассмотренную выше эйлерову), заменим каждый треугольник точкой, расположенной в точке пересечения его медиан, с массой, равной его площади, и потом найдем центр тяжести построенных масс указанным выше способом (с помощью векторной формулы). Согласно принятым выше аксиомам полученная точка и будет центром масс данного многоугольника. Применяя различные триангуляции, мы всегда получим один и тот же результат.

Для того чтобы найти центр масс произвольной, но достаточно «хорошей» плоской фигуры с равномерной распределенной массой, достаточно вписать в эту фигуру n-угольник, найти его центр масс и выполнить переход к пределу при n, стремящемся к бесконечности. Под хорошей фигурой здесь понимается любая фигура, для которой упомянутый предельный переход можно строго обосновать. Мы не будем углубляться в эти вопросы, скажем только, что хорошими фигурами заведомо являются все фигуры, изучаемые в элементарной геометрии, т. е. фигуры, ограниченные отрезками прямых и/или дугами окружностей, а придумать «нехорошую» фигуру на самом деле трудная задача. Указанный метод вычисления центров масс придумал Архимед. Он умел применять его даже для не совсем элементарных фигур, например для сегментов параболы. Читатель, знакомый с теорией пределов, может самостоятельно попробовать повторить результаты Архимеда, например найти центр тяжести сектора круга с данным углом или соответствующего сегмента.

Для упрощения нахождения центров масс произвольных фигур полезно использовать два свойства, которые можно принять за аксиомы.

Аксиома 4. *Если система материальных точек имеет ось симметрии (т. е. прямую, при зеркальном отражении от которой система точек переходит в сама в себя), то ее центр масс лежит на этой оси.*

Аксиома 5. *Если система материальных точек имеет центр вращения (т. е. точку, при повороте вокруг которой на угол, меньший 360 градусов, система переходит в себя), то ее центр масс совпадает с центром вращения. В частности, если система точек имеет центр симметрии, то центр масс с ним совпадает.*

Эти свойства в случае конечной системы точек легко вытекают из аксиомы 0 и доказанной выше векторной формулы для центра масс. Действительно, при зеркальном отражении или повороте система переходит в себя и поэтому ее центр масс остается на месте. Если же предположить, что аксиомы 4–5 неверны, и воспользоваться упомянутой формулой (и теоремами элементарной геометрии), то центр масс при указанном движении перемещается в другую точку, что невозможно.

Однако для бесконечных систем точек все не так просто, хотя бы потому, что такая система может вообще не иметь центра масс (как, например, прямая, потому что она бесконечна в обе стороны, или луч, потому что он бесконечен в одну сторону), поэтому указанные свойства мы принимаем за аксиомы и в их формулировку добавляем предположение о существовании у рассматриваемой системы точек центра масс.

Из указанных аксиом вытекает, например, что круг с равномерно распределенной массой имеет центр масс, совпадающий с центром круга, и то же самое верно для окружности с равномерно распределенной массой.

Аналогичные утверждения верны и для правильного многоугольника с равномерно распределенной массой, и для правильного многоугольника с массой, равномерно распределенной по его периметру.

5. Центр тяжести периметра треугольника

К вопросу о быстром нахождении центра масс многоугольника мы далее вернемся, а сейчас рассмотрим, следуя книге [2], задачу о нахождении центра масс периметра произвольного треугольника (т. е. объединения трех его сторон). Этот вопрос представляет интерес, например, потому, что центр тяжести всего треугольника совпадает с центром тяжести только трех его вершин, в которых сосредоточена вся его масса, причем в каждой поровну, т. е. с точкой пересечения медиан. А что будет, если масса равномерно распределена по всему периметру? Оказывается, центр масс в этом случае совпадает с другой замечательной точкой треугольника — центром окружности, вписанной в срединный треугольник (см. рис. 7).

Действительно, заменим каждую сторону треугольника ее центром, предполагая, что вся масса стороны сосредоточена в ее середине. Согласно аксиоме 3 задача сводится к нахождению центра

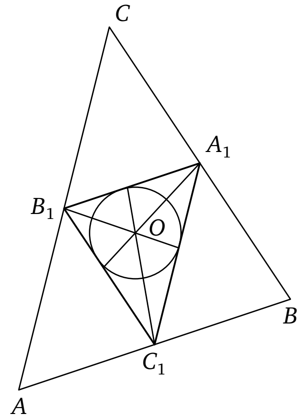

Рис. 7. Центр тяжести периметра треугольника

тяжести трех вершин треугольника, масса каждой из которых равна длине противоположной стороны [17].

Для нахождения указанного центра тяжести применим описанный выше метод вычисления центра масс системы из трех точек. Согласно аксиоме 2 центр тяжести системы из точек A_1, B_1 с массами, пропорциональными $|B_1C_1|$ и $|A_1C_1|$ соответственно, расположен в точке C_2, делящей сторону A_1B_1 пропорционально сторонам A_1C_1, B_1C_1. Но тогда отрезок C_1C_2 совпадает с биссектрисой угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ в силу известного из школьной геометрии свойства биссектрисы. Согласно аксиомам 2 и 3 искомый центр тяжести точек A_1, B_1, C_1 с массами $|B_1C_1|$, $|A_1C_1|$, $|A_1B_1|$ лежит на биссектрисе C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогичное рассуждение показывает, что он лежит и на остальных двух биссектрисах, а значит, совпадает с их точкой пересечения, т. е. с центром вписанного в срединный треугольник $A_1B_1C_1$ круга.

Для нахождения центра масс периметра произвольного многоугольника или вообще произвольной конечной системы отрезков можно, разумеется, аналогичным образом свести задачу к нахождению центра масс конечной системы точек, однако такого красивого

[17] Здесь безразлично, что понимается под длинами противоположных сторон — то ли речь идет о сторонах треугольника ABC, то ли о сторонах треугольника $A_1B_1C_1$, образованного центрами сторон треугольника ABC, так как треугольник $A_1B_1C_1$ является срединным треугольником для треугольника ABC и согласно его известному свойству длины его сторон в два раза меньше длин соответствующих сторон треугольника ABC.

ответа, как для треугольника, по-видимому не получится (за исключением случаев, когда рассмотренная система обладает тем или иным свойством симметрии).

Задача 11. Докажите, что центроид треугольника совпадает с центром масс его периметра тогда и только тогда, когда треугольник правильный.

Указание. Для любого треугольника центр масс совпадает с центром масс его срединного треугольника, центр масс периметра данного треугольника совпадает с центром круга, вписанного в срединный треугольник, а последний подобен данному треугольнику, поэтому достаточно доказать, что центр вписанного круга совпадает с центроидом треугольника тогда и только тогда, когда он правильный. Указанное совпадение возможно только в случае, когда биссектрисы являются медианами. Но биссектриса совпадает с медианой только у равнобедренного треугольника. Совпадение центроида с центром вписанного круга также немедленно следует из задач 3 и 5.

Отступление от основной темы: другие замечательные точки треугольника

О замечательных точках треугольника написаны целые книги (наиболее доступная [10], см. также [11]). Далее кратко коснемся только некоторых из них.

С помощью следующей задачи легко доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке — его *ортоцентре*[18].

Задача 12. Докажите, что центр описанного вокруг треугольника круга совпадает с ортоцентром его срединного треугольника, а центроид треугольника совпадет с центроидом его срединного треугольника.

Задача 13. Рассмотрим следующие замечательные точки в треугольнике: центроид, центр масс периметра, центр вписанного круга, центр описанного круга, ортоцентр. Докажите, что любые две из них совпадают тогда и только тогда, когда треугольник правильный.

Указание. Примените задачи 11 и 12, а также следующие факты: если из трех линий, проведенных из одной вершины, а именно вы-

[18] Это, по-видимому, самое простое доказательство существования ортоцентра иногда приписывается великому немецкому математику К. Ф. Гауссу.

соты, медианы и биссектрисы, две совпадают, то треугольник равнобедренный.

Основания высот треугольника образуют другой замечательный треугольник, также вписанный в данный. Он называется *ортоцентрическим треугольником*.

Окружность, описанная вокруг срединного треугольника, называется *окружностью Эйлера — Фейербаха* или *окружностью девяти точек*.

Задача 14. Докажите, что окружность девяти точек проходит через основания высот треугольника, т. е. совпадает с описанной окружностью ортоцентрического треугольника.

Еще три интересные точки, лежащие на этой окружности, предоставляется найти читателю (если он про них еще не знает). Наиболее интересное ее свойство было открыто немецким геометром Фейербахом [19]. Окружность девяти точек касается вписанной окружности. За доказательством отсылаем читателя, например, к книге [6].

С помощью следующей задачи также можно доказать существование ортоцентра.

Задача 15. Докажите, что для любого треугольника центр круга, вписанного в его ортоцентрический треугольник, совпадает с ортоцентром данного треугольника. Другими словами, высоты данного треугольника совпадают с биссектрисами его ортоцентрического треугольника.

Еще одно замечательное свойство ортоцентрического треугольника (минимальность его периметра среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник), открытое итальянским геометром Фаньяно в XVIII веке, можно найти во многих книгах по геометрии (например, [8, 11]).

6. Центр масс четырехугольника и параллелограмм Виттенбауэра

Указанный выше прием для нахождения центра масс многоугольника можно, конечно, применить и для четырехугольника, но есть более быстрый способ. После того как мы нашли центры масс двух

[19] Братом известного философа Людвига Фейербаха.

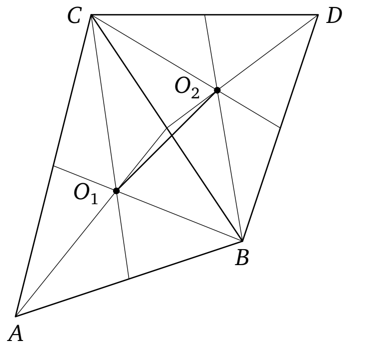

Рис. 8. Разбиение четырехугольника на два треугольника и их центры тяжести

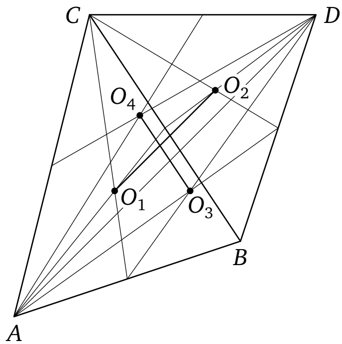

Рис. 9. Построение центра тяжести четырехугольника

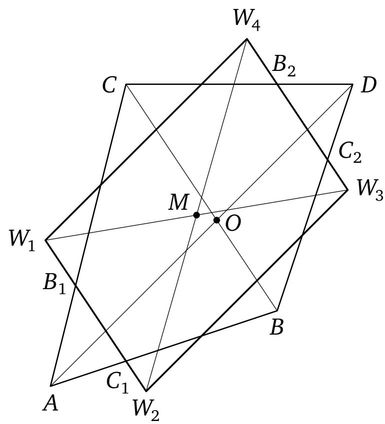

Рис. 10. Параллелограмм Виттенбауэра

треугольников, на которые четырехугольник разбивается диагональю, можно, не вычисляя искомый центр тяжести его с помощью аксиомы 2 (для чего нужно будут вычислить площади треугольников), заметить, что он лежит на отрезке, соединяющем центры этих треугольников (см. рис. 8).

Проведя другую диагональ и повторяя эти рассуждения для двух треугольников, отсекаемых этой диагональю, получим второй отрезок, на котором тоже лежит искомый центр. Значит, он лежит на пересечении полученных отрезков (см. рис. 9).

Но есть и другой способ найти центр тяжести четырехугольника. Согласно книге известного немецкого геометра В. Бляшке[20] (эта ссылка дана в книге [4]) это можно сделать, найдя центр *параллелограмма Виттенбауэра*[21] (см. рис. 10).

Он определяется следующим образом: каждая из сторон четырехугольника разбивается парой точек на три равных отрезка, и через каждую пару соседних точек деления, расположенных на смежных сторонах, проводятся прямые. Они и ограничивают параллелограмм (см. рис. 10).

Задача 16. Докажите, что параллелограмм Виттенбауэра действительно является параллелограммом.

Указание. Его стороны параллельны соответствующим диагоналям данного четырехугольника.

Задача 17. Докажите, что для любого четырехугольника стороны его параллелограмма Виттенбауэра составляют по длине две трети от параллельных им диагоналей этого четырехугольника.

Указание. Треугольники, отсекаемые от четырехугольника его параллелограммом Виттенбауэра, подобны с коэффициентом подобия $k = 3$ треугольникам, отсекаемым от него диагоналями.

Задача 18. Докажите, что для любого четырехугольника его параллелограмм Виттенбауэра подобен параллелограмму Вариньона с коэффициентом подобия $k = 4/3$, и найдите отношение его площади к площади этого четырехугольника.

Задача 19. Докажите, что для любого четырехугольника центр соответствующего параллелограмма Виттенбауэра совпадает с центром тяжести этого четырехугольника (с точкой пересечения отрезков, соединяющих центры пар треугольников, на которые данный четырехугольник разбивается диагоналями).

Указание. В таких случаях древние индусы вместо доказательства писали: «Смотри» — и указывали на рисунок. Действительно, точка O_1 является центром треугольника ACB (см. рис. 11), поэтому она делит пополам отрезок C_1B_1, где C_1C — треть стороны AC, а B_1B — треть стороны AB. Отрезок C_1B_1 параллелен CB и стороне

[20] Projective Geometry, Basel, 1954.
[21] F. Wittenbauer (1857–1922).

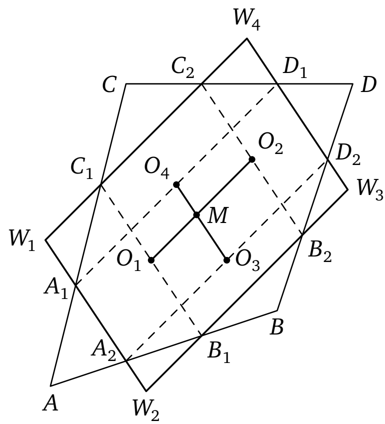

Рис. 11. Центр тяжести параллелограмма Виттенбауэра совпадает с центром тяжести четырехугольника

W_1W_2 параллелограмма Виттенбауэра, значит, $W_1C_1B_1W_2$ — параллелограмм, и поэтому $|C_1O_1| = |W_1W_2|/2$. Аналогично точка O_2 делит пополам отрезок C_2D_2, $|C_2O_2| = |C_1O_1|$, $C_2O_2 \parallel C_1O_1$. Тогда $C_1O_1C_2O_2$ — параллелограмм, значит, $O_1O_2 \parallel W_1W_4$, поэтому O_1O_2 лежит на средней линии параллелограмма Виттенбауэра. Аналогично O_3O_4 лежит на другой его средней линии. Поэтому точка пересечения отрезков O_1O_2 и O_3O_4 (центр масс четырехугольника $ABCD$) совпадает с центром параллелограмма Виттенбауэра.

Задача 20 [4]. Докажите, что центр тяжести четырехугольника совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

Указание. Данное условие выполнено тогда и только тогда, когда центры параллелограммов Вариньона и Виттенбауэра совпадают (и являются их центром подобия). Достаточно доказать, что общий центр M обоих параллелограммов совпадает с точкой O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, и применить задачу 8. Допустим, что $M \neq O$ (см. рис. 10). Для получения противоречия достаточно доказать, что тогда прямая OM параллельна всем сторонам параллелограммов. Докажем, например, что $OM \parallel W_1W_4$. Проведем через M прямую, параллельную диагонали CB четырехугольника $ABCD$, до пересечения со стороной W_1W_4 параллелограмма Виттенбауэра в точке P. Точку пересечения отрезка PM со стороной параллелограмма Вариньона обозначим Q. Из подобия этих параллелограммов (см. задачу 18) следует, что $PM : QM = 4 : 3$. Рассмотрим точки P_1, Q_1, в которых диагональ CB пересекается с теми же сторонами параллелограммов Виттенбауэра и Вариньона. Так как W_1W_4 отсекает от треугольника ACO подобный ему (по двум углам) с коэффициентом $1/3$ треугольник, получаем, что $CP : CO = 1 : 3$, т. е. $OP : CO = 2 : 3$. Аналогично получаем, что $OQ : CO = 1 : 2$ (для обоснования можно также воспользоваться свойствами средней линии треугольника). Отсюда имеем $OP : OQ = 4 : 3$. Но так как $PM : QM = 4 : 3 = PO : QO$, $PM \parallel PO$ и пересекающие их стороны параллелограммов параллельны, получаем, что $OM \parallel W_1W_4$. Довольно длинное решение задачи 20 с использование векторной алгебры имеется в статье [5].

Сравнение двух способов построения центра масс четырехугольника

На первый взгляд кажется, что способ Виттенбауэра построения центра масс проще. В нем проводятся шесть прямых (стороны параллелограмма и его диагонали). А в первом методе надо у каждого треугольника найти центр (для этого проводятся две прямые), а потом точку пересечения двух диагоналей получившегося четырехугольника — всего десять прямых. Но надо учитывать сложность построения точек, делящих на три равные части стороны четырехугольника. Тогда способ Виттенбауера оказывается более сложным.

Начнем с построения центра масс треугольника. Его можно построить, проведя всего пять линий. Действительно, рассмотрим треугольник ABC, и сложим векторы $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, построив вектор $\overline{CC_1}$. Для этого надо сделать две засечки окружностями (см. рис. 12). Аналогично построим точку A_1. Заметим, что из двух нужных для этого окружностей одна (с центром в точке B) уже была построена, поэтому всего в указанной части построения использовалось три окружности. Проведя прямые CC_1, AA_1, получаем в их пересечении центр треугольника ABC. Если предположить, что прямые AB и CB были проведены, то проведенное построение дает также середины сторон AB, AC и две из трех медиан треугольника ABC.

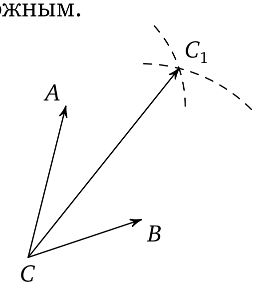

Рис. 12. Построение суммы двух векторов

Оценим сложность построения центра масс четырехугольника $ABCD$ первым способом. Предположим, что стороны четырехугольника $ABCD$ даны. Построим указанным выше способом центры треугольников ABC и ACD. Для этого проведено 10 линий и построены середины всех сторон четырехугольника $ABCD$. Чтобы найти центры треугольников ABD и ADC, достаточно в каждом из них провести по две медианы (еще четыре линии), и в точках их пересечения мы получим центры треугольников ABD и ADC. Остается в полученном четырехугольнике, образованном построенными центрами, провести две диагонали. Общая сложность построения — 16 линий. Если стороны четырехугольника не заданы, то их придется провести. В этом случае сложность построения возрастает на 4. Читателю предлагаем попробовать уменьшить сложность, используя параллелограмм Виттенбауэра. Вряд ли ему это удастся.

7. Центр тяжести трапеции

Центр тяжести трапеции можно найти более быстрым способом, чем центр тяжести произвольного четырехугольника. Укажем, следуя книге [2], два способа, как это сделать. Первый способ очевиден из следующего рис. 13.

Действительно, согласно сделанному в разделе 4 замечанию центр масс трапеции лежит на прямой O_1O_2, соединяющей центры оснований. С другой стороны, он, как и у любого четырехугольника, лежит на отрезке M_1M_2, соединяющем центры масс треугольников ABC и ACD. Оценим сложность этого построения. Вначале в нем для двух треугольников, на которые трапеция делится одной диагональю, строятся их центры со сложностью 10. При этом попутно строятся середины оснований (в предположении, что эти основания уже даны). Остается провести еще две прямые и найти точку их

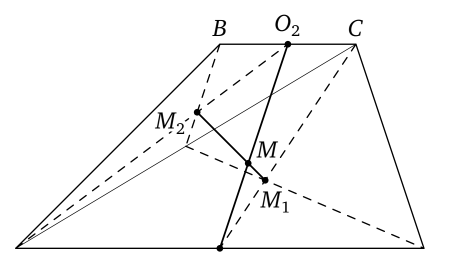

Рис. 13. Построение центра тяжести трапеции

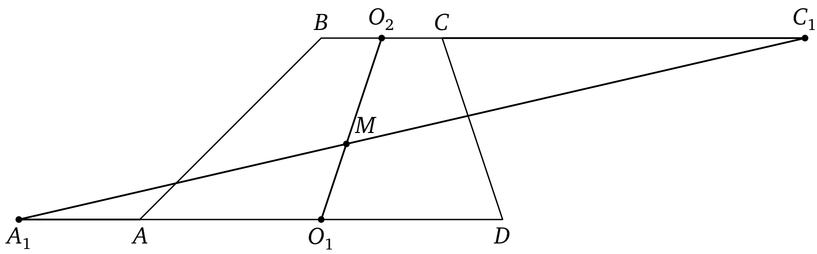

Рис. 14. Второй способ построения центра тяжести трапеции

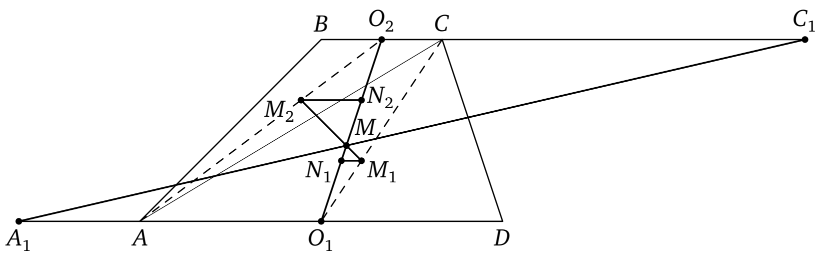

Рис. 15. Доказательство правильности второго способа

пересечения (см. рис. 13). Боковые стороны (и диагонали) при этом не предполагаются данными. Если не даны и основания, то сложность увеличивается на 2. Второй способ показан на рис. 14. На нем $|A_1A| = |BC|$, $|C_1C| = |AD|$.

Его обоснование не так очевидно и показано на рис. 15. Обозначим длины оснований трапеции через a, b, а длину отрезка O_1O_2, соединяющего их центры, через l. Точка M_2 — центр треугольника ABC — делит AO_2 в отношении $2 : 1$. Аналогично расположена точка M_1. На рис. 15 проведены прямые M_iN_i, $i = 1, 2$, параллельно основаниям трапеции до пересечения с прямой O_1O_2. Через M обозначена точка пересечения M_1M_2 с O_1O_2 (центр масс трапеции). Пары треугольников AO_2O_1, $M_2O_2N_2$ и CO_2O_1, $M_1O_1N_1$ подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = 3$, откуда следует, что

$$\frac{|M_2N_2|}{|M_1N_1|} = \frac{a}{b}$$

и точки N_1, N_2 делят O_1O_2 на три равные части. Тогда треугольники M_1MN_1 и M_2MN_2 тоже подобны по двум углам с коэффициентом подобия $k = a/b$, значит, $|N_2M| : |N_1M| = a : b$. Так как $|N_2N_1| = l/3$, имеем

$$|N_2M| = \frac{la}{3(a+b)}, \quad |N_1M| = \frac{lb}{3(a+b)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|MO_2|}{|MO_1|} = \frac{2a+b}{2b+a},$$

так как

$$|MO_2| = \frac{l}{3} + \frac{la}{3(a+b)} = \frac{l(2a+b)}{3(a+b)}, \quad |MO_1| = \frac{l(2b+a)}{3(a+b)}.$$

Из равенств $|A_1A| = |BC|$, $|C_1C| = |AD|$ следует пропорция

$$\frac{|MO_2|}{|MO_1|} = \frac{2a+b}{2b+a} = \frac{|O_2C_2|}{|A_1O_1|},$$

а так как $\angle A_1O_1M = \angle C_1O_2M$ как накрест лежащие при параллельных прямых, то треугольники A_1O_1M и C_1O_2M подобны, следовательно, $\angle A_1MO_1 = \angle C_1MO_2$, значит, прямая A_1C_1 проходит через точку M, что и требовалось доказать.

Оценим сложность этого построения. Вначале в нем строятся точки A_1, C_1, для чего проводятся по две линии для каждой точки (если основания заданы, все равно их нужно удлинять, проводя через них прямые). Потом строятся середины оснований. Остается провести две прямые. Как построить середины оснований? Если основания заданы, то каждую из середин можно построить с помощью двух окружностей и прямой, проходящей через их общую хорду (см. рис. 16).

Общая сложность, как и в первом построении, равна 12 (но уже без предположения, что основания даны). Но можно построить середины оснований и другим способом. Проведем диагонали и найдем точку их пересечения P, продолжим боковые стороны до их пересе-

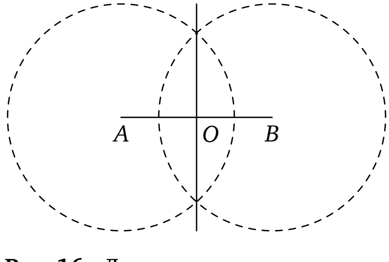

Рис. 16. Деление отрезка пополам

чения в точке Q и проведем через P, Q прямую. Она делит основания пополам[22].

Задача 21. Докажите это.

Указание. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой и боковыми сторонами на два равных отрезка. Примените признаки подобия треугольников.

Сложность указанного построения равна 11.

8. Центроид тетраэдра

Многое из того, что написано выше о центрах тяжести, можно из плоскости перенести без существенных изменений в пространство. Все аксиомы остаются без изменений, кроме аксиом 4 и 5, которые придется несколько модифицировать[23].

Если четырехточечная система равных масс расположена в пространстве, то она образует тетраэдр (не обязательно правильный). Для тетраэдра аналогично сделанному выше можно определить три *бимедианы*. Тогда аналогично уже доказанному можно убедиться в том, что центры всех бимедиан совпадают, причем совпадают с центроидом тетраэдра (см. рис. 17). Для тетраэдра эта теорема выглядит даже более естественно, чем для четырехугольника.

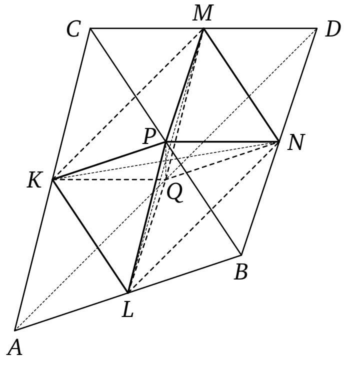

Рис. 17. Центроид тетраэдра совпадает с точкой пересечения бимедиан

[22] Использованный способ деления пополам двух параллельных отрезков одной линейкой принадлежит знаменитому швейцарскому геометру Якобу Штайнеру.

[23] Вместо оси симметрии надо взять плоскость симметрии, под вращением надо понимать вращение вокруг оси, а центр симметрии так и остается центром симметрии.

Можно определить также *медианные плоскости* тетраэдра. Так называют любую из шести плоскостей, проходящих через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра.

Задача 22. Докажите, что все медианные плоскости пересекаются в центроиде тетраэдра и делят его объем пополам.

Указание. Медианная плоскость содержит бимедиану. Перпендикуляры, опущенные на медианную плоскость из концов противоположного ребра, равны.

Теорема о срединном треугольнике также легко обобщается на случай тетраэдра (см. рис. 18).

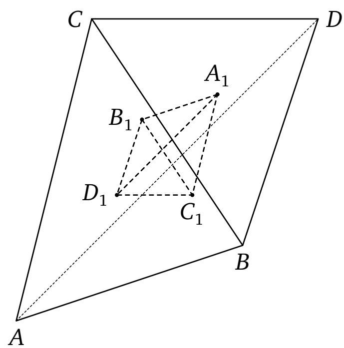

Рис. 18. Тетраэдр с вершинами в центроидах граней тетраэдра

Задача 23. Докажите, что центры граней тетраэдра образуют тетраэдр, гомотетичный большему с коэффициентом 3 относительно общего центроида обоих тетраэдров. В этом центре пересекаются все медианы тетраэдра и делятся им в отношении 3 : 1.

Указание. Если заменить массу в каждой вершине на три равные, то центр масс системы не изменится. Если его вычислять, заменяя три массы, лежащие в одной грани, на ее центр, то получится система из четырех утроенных масс, расположенных в вершинах срединного тетраэдра. У нее центр масс совпадает с центром масс исходной системы. Если же в исходной системе заменить любые три массы из одной грани на утроенную массу, расположенную в центре этой грани, то для нахождения центра масс исходной системы согласно аксиоме 2 надо будет отрезок, соединяющий вершину с центром рассмотренной противоположной грани (его можно назвать *медианой*

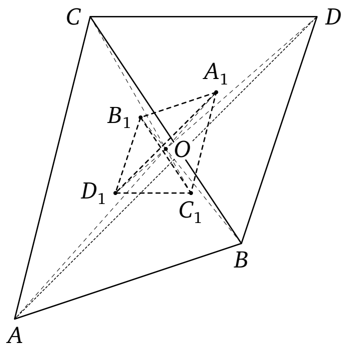

Рис. 19. Еще один способ нахождения центра четырех равных масс: он совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра

тетраэдра, проведенной к этой грани), разделить в отношении 3 : 1 (точка деления расположена ближе к рассматриваемой грани, чем к противоположной к ней вершине). Отсюда следует, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3 : 1, и эта точка есть центроид тетраэдра (см. рис. 19).

Задача 24. Какие барицентрические координаты имеет центроид тетраэдра относительно этого тетраэдра?

Ответ: (1 : 1 : 1 : 1).

9. Центр масс поверхности тетраэдра

Докажем, что он находится в центре шара, вписанного в срединный тетраэдр (эта теорема является стереометрическим аналогом аналогичной теоремы о центре масс периметра треугольника).

Сначала напомним некоторые известные факты из геометрии тетраэдра (для тех, кто их не знает, они превращаются в задачи). Напомним, что *биссектрисой трехгранного угла* называется прямая, образующая равные углы с ребрами трехгранного угла. *Биссектральной плоскостью* двугранного угла называется плоскость, образующая с его гранями равные двугранные углы.

Задача 25. Докажите, что любая точка биссектрисы трехгранного угла равноудалена от его граней.

Следующие три задачи использоваться далее не будут и приводятся только для полноты изложения.

Задача 26. Докажите, что любая точка биссектральной плоскости двугранного угла равноудалена от его граней.

Задача 27. Докажите, что биссектриса трехгранного угла совпадает с пересечением его биссектральных плоскостей.

Доказательство сформулированной в начале данного раздела теоремы, приведенное в книге [2], основывалось на следующем свойстве вписанного шара и некоторых механических соображениях.

Задача 28. Докажите, что центр вписанного шара тетраэдра находится в единственной точке пересечения его шести биссектральных плоскостей.

Далее будет приведено другое доказательство, основанное на другом свойстве вписанного шара. Оно имеет преимущество, в частности, и в том, что может без существенных изменений быть перенесено на произвольное n-мерное пространство.

Задача 29. Докажите, что центр вписанного шара тетраэдра находится в точке пересечения биссектрис его трехгранных углов.

Следующая задача является стереометрическим аналогом известного свойства, касающегося деления биссектрисой треугольника противоположной стороны, и интересна сама по себе.

Задача 30. Докажите, что биссектриса угла тетраэдра, ограниченного гранями с площадями S_i, попадает в точку четвертой грани, которая относительно трех ее вершин имеет барицентрические координаты $S_1 : S_2 : S_3$.

Указание. Обозначим через A, B, C, D вершины тетраэдра и через M — точку пересечения биссектрисы трехгранного угла D с гранью ABC (см. рис. 20). Так как объем тетраэдра равен трети произведения площади основания на длину высоты, а высоты, опущенные из точки M на боковые грани тетраэдра $ABCD$, равны согласно свойству биссектрисы, отношение объемов тетраэдров

$$V(DBCM) : V(DACM) : V(DABM)$$

равно отношению площадей треугольников $S(DBC) : S(DAC) : S(DAB)$, которое было обозначено как $S_1 : S_2 : S_3$. Но эти тетраэдры имеют общую высоту, опущенную на основания BCM, ACM, ABM, поэтому отношение площадей этих треугольников также равно $S_1 : S_2 : S_3$. Остается применить задачу 4.

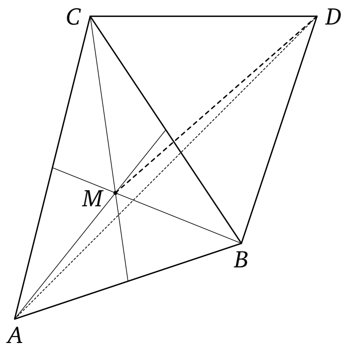

Рис. 20. Биссектриса трехгранного угла при вершине D тетраэдра $ABCD$ (с тремя равновеликими гранями при вершине D)

Докажем теперь, что центр масс поверхности тетраэдра находится в центре шара, вписанного в его срединный тетраэдр (см. рис. 21).

Заменим грани DAB, DBC, DAC, ABC на материальные точки с центрами в их центрах тяжести C_1, A_1, B_1, D_1 и массами, равными их площадям. Задача сводится к нахождению центра тяжести системы точек C_1, A_1, B_1, D_1 — вершин срединного тетраэдра. Согласно задаче 18 площади граней DAB, DBC, DAC, ABC пропорциональны площадям граней $D_1A_1B_1$, $D_1B_1C_1$, $D_1A_1C_1$, $A_1B_1C_1$. Поэтому далее можно считать, что массы этих точек пропорциональны площадям противоположных им граней образованного ими тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, и для краткости индексы в обозначениях опускать. Заменим точки A, B, C одной точкой — их центром масс M. Если площади граней DBC, DAC,

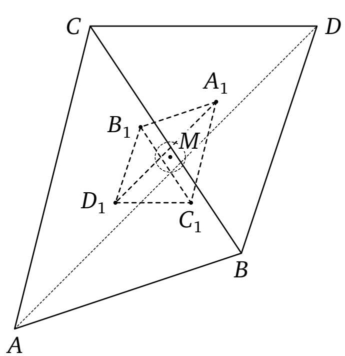

Рис. 21. Центр тяжести периметра треугольника

DAB обозначить S_1, S_2, S_3, то барицентрические координаты этой точки относительно треугольника ABC согласно задаче 2 будут равны $S_1 : S_2 : S_3$ (т. е. отношение площадей треугольников MBC, MAC, MAB равно отношению площадей граней DBC, DAC, DAB). Согласно задаче 24 биссектриса трехгранного угла D попадает в точности в точку M. Другими словами, отрезок MD совпадает с биссектрисой трехгранного угла D. Но согласно используемой нами аксиоматике центр тяжести системы точек A, B, C, D совпадает с центром тяжести системы точек M, D и поэтому лежит на отрезке MD, т. е. биссектрисе угла D. Аналогично получаем, что он лежит и на биссектрисах трех других углов, а значит, совпадает с точкой их пересечения. Но эта точка согласно задаче 22 совпадает с центром вписанной в рассматриваемый тетраэдр сферы, что и заканчивает доказательство теоремы.

Отступление про равногранные тетраэдры

Однако не все теоремы геометрии тетраэдра аналогичны теоремам геометрии треугольника. Например, задача 11 не имеет прямого аналога в случае тетраэдра, но некоторый аналог у нее все же имеется.

Тетраэдр назовем *равногранным,* если площади всех его граней равны. Иногда равногранные тетраэдры называют также *полуправильными*. Далее для разнообразия используются оба термина. У равногранных тетраэдров известна сотня (это не преувеличение!) различных свойств, каждое из которых можно принять за его определение. Например, широко известна следующая характеризация равногранных тетраэдров (см., скажем, [11]).

Задача 31. Докажите, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда его грани равны (не только по площади, но являются равными треугольниками).

Указание. Достаточно доказать, что у этого тетраэдра пары противоположных сторон равны. Для доказательства, например, равенства $|AC| = |BD|$ можно спроектировать эти стороны на плоскость, проходящую через AB параллельно CD, убедиться, что эти проекции равны, и доказать равенство двух подходящих прямоугольных треугольников с гипотенузами AC и BD. Равенство же проекций вытекает из того, что при указанном проектировании тетраэдр $ABCD$ проектируется в параллелограмм AC_1BD_1 (на самом деле он даже прямоугольник). Тот факт, что AC_1BD_1 — параллелограмм, следует из того, что его диагонали AB, C_1D_1 в точке пересечения делятся пополам. А это следует из того, что высоты в треугольниках CBD и CAD, опущенные на их общую сторону, равны (так как равны их площади), значит, равны и их проекции BH и AK на плоскость AC_1BD_1, а так как K, H лежат на диагонали C_1D_1, из равенства $|BH| = |AK|$ следует равенство прямоугольных треугольников BHO, AKO, где O — точка пересечения диагоналей AB, C_1D_1, откуда заключаем, что O — середина AB, и аналогично получаем, что O — середина C_1D_1. Очевидно, что правильный тетраэдр является равногранным, но обратное неверно.

Задача 32. Докажите следующее свойство равногранного тетраэдра: тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда биссектриса любого трехгранного угла попадает в центр тяжести противоположной грани (см. рис. 20).

Указание. Примените задачу 30.

Сравните следующую задачу с задачей 11.

Задача 33. Докажите, что центр тяжести поверхности тетраэдра совпадает с центроидом тетраэдра тогда и только тогда, когда тетраэдр равногранный.

Указание. Согласно доказанной теореме достаточно рассмотреть случай, когда центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра. Тогда согласно задаче 32 биссектриса любого трехгранного угла попадает в центр тяжести противоположной грани. Согласно задаче 30 это условие равносильно равногранности тетраэдра.

Задача 34. Докажите, что центр шара, вписанного в тетраэдр с площадями граней S_A, S_B, S_C, S_D, имеет барицентрические координаты $S_A : S_B : S_C : S_D$ относительно этого тетраэдра.

Указание. Соединим центр шара с вершинами данного тетраэдра. Он разобьется на четыре тетраэдра. Их высоты, опущенные из центра на грани данного тетраэдра, равны. Так как объем тетраэдра равен трети произведения основания на высоту, отношение объемов указанных тетраэдров равно $S_A : S_B : S_C : S_D$. Поэтому отношение объемов тетраэдров с общим основанием S_A равно $(S_A + S_B + S_C + S_D) : S_A$. Значит, отношение их высот, опущенных на общее основание, такое же. Из соображений подобия следует, что если через A и центр шара провести прямую до пересечения с указанным основанием, то этот центр будет делить ее в отношении $S_A : (S_B + S_C + S_D)$. Из задач 24 и 34 легко выводится решение задачи 33.

В заключение еще одна задача о нахождении центра масс многогранной поверхности (это теорема из книги [2]).

Задача 35. Докажите, что центр масс боковой поверхности пирамиды, у которой основание высоты является центром вписанного в основание круга (в частности, правильной пирамиды), совпадает с центром масс периметра сечения пирамиды, параллельного основанию и делящего высоту пирамиды в отношении $1:2$ (в направлении от основания к вершине).

Отступление про замечательные точки тетраэдра

Центр масс тетраэдра является одной из его наиболее замечательных точек. Кроме указанных выше ее свойств можно отметить следующее (теорема Лейбница).

Задача 36. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки до вершин тетраэдра достигает минимума в его центроиде. Такая же теорема справедлива и для треугольника.

Указания к решению этой задачи появятся далее.

У тетраэдра есть еще несколько замечательных точек, являющихся аналогами соответствующих точек треугольника. Например, это центр вписанного шара (точка пересечения биссектрис трехгранных углов) и центр описанного шара (точка пересечения перпендикуляров к граням, восстановленных из центров описанных вокруг них кругов).

Известен следующий факт (см., например, [11]).

Задача 37. Докажите, что центры описанного и вписанного шаров совпадают только у равногранного тетраэдра.

Указание. Спроектируем общий центр на все грани. Каждая проекция попадает внутрь грани и совпадает с центром описанного круга для этой грани, значит, все грани остроугольные, причем радиусы описанных кругов для всех граней будут равны. Из теоремы о вписанных углах следует, что плоские углы в любых двух гранях, противоположные их общему ребру, равны. Значит, сумма плоских углов при любой вершине равна 180 градусов, так как эти углы равны углам грани, противоположной этой вершине. Рассмотрим развертку тетраэдра на его основание, отогнув остальные три грани (поворачивая их вокруг соответствующих ребер основания) так, чтобы они легли на его плоскость. Полученная развертка состоит из четырех треугольников, равных граням тетраэдра, которые образуют шестиугольник со вписанным в него треугольником (основанием тетраэдра). Из равенства суммы плоских углов при любой вершине 180 градусам следует, что на самом деле этот шестиугольник вырождается в треугольник, у которого срединный треугольник совпадает с рассматриваемым основанием тетраэдра. Поэтому все четыре рассматриваемых треугольника равны, т. е. грани тетраэдра равны. Если же грани тетраэдра равны, то согласно задаче 39 центр описанного шара совпадает с центроидом тетраэдра, и с ним же совпадает центр вписанного шара согласно задаче 33.

Есть, конечно, и другие замечательные точки. Например, *точка Лемуана — Люилье* треугольника имеет аналогом точку Люилье тетраэдра — это такая точка, для которой сумма квадратов расстояний до граней тетраэдра минимальна (см., например, [8, 11]).

Но высоты тетраэдра не обязательно пересекаются в одной точке. Если это так, то тетраэдр называется *ортоцентрическим*[24].

Как показывает задача 33, центр вписанного шара совпадает с центроидом не только у правильного, но и у любого равногранного тетраэдра (в отличие от центра вписанного круга треугольника.)

Найти точку, в которой достигается минимум суммы расстояний до вершин произвольного тетраэдра, непросто. В случае остроугольного[25] треугольника такая точка (называемая *точкой Торричелли*) ищется легко — из нее все стороны треугольника видны под равными углами.

Задача 38. Докажите, что точка, в которой достигается минимум суммы расстояний до вершин равногранного тетраэдра, совпадает с центром описанного шара и центроидом тетраэдра.

Указание. У равногранного тетраэдра противоположные ребра равны, а бимедианы перпендикулярны соединяемым ими ребрам и пересекаются в центроиде и центре описанного шара.

Задача 39. Докажите, что центроид тетраэдра совпадает с центром описанного шара только у равногранных тетраэдров.

Указание. Бимедианы делятся центроидом пополам. Треугольники, образованные центроидом и ребрами тетраэдра, равнобедренные,

[24] О нем тоже есть, что сказать, но отступлений и так было сделано много.
[25] Достаточно, чтобы его углы были меньше 120 градусов.

значит, в них медианы совпадают с высотами, т. е. бимедианы перпендикулярны своим ребрам (а значит, являются также бивысотами), а это возможно только у равногранного тетраэдра.

Задача 40. Докажите, что все медианы равны только у равногранного тетраэдра. Аналогичное утверждение верно для высот. Верно ли оно для биссектрис?

Указание. Утверждение про медианы следует из задач 23 и 39. Утверждение про высоты следует из формулы для объема тетраэдра, которая показывает, что если высоты равны, то площади граней тоже.

Далее нам понадобится следующий полезный факт.

Задача 41. Докажите, что объем тетраэдра можно выразить через его двугранный угол α при ребре a и площади S_1, S_2 граней, содержащих это ребро, по формуле

$$\frac{2}{3}S_1S_2\frac{\sin\alpha}{a}.$$

Следующая задача является аналогом свойства биссектрисы треугольника.

Задача 42. Докажите, что биссектральная плоскость делит противоположное ребро тетраэдра пропорционально площадям граней, соединяемых этим ребром.

Указание. Возьмите два тетраэдра, на которые биссектральная плоскость делит данный тетраэдр. Отношение их объемов равно отношению площадей граней, между которыми она проведена. Рассматривая эти тетраэдры со стороны общего основания, получаем, что отношение их высот (равное отношению, в котором делится противоположное ребро) равно отношению площадей граней, соединяемых этим ребром.

Отразим медианную плоскость относительно проходящей через то же ребро биссектральной плоскости. Полученную плоскость назовем *симедианной плоскостью*.

Следующая задача является аналогом одного свойства медианы треугольника.

Задача 43. Докажите, что медианная плоскость делит двугранный угол, образованный гранями с площадями S_1, S_2, на углы α_1, α_2, так, что

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Указание. Рассмотрите два тетраэдра, на которые медианная плоскость делит данный тетраэдр. Их объемы равны. Поэтому согласно задаче 41 имеем $S_1 \sin\alpha_1 = S_2 \sin\alpha_2$.

Следующая задача является аналогом свойства симедиан треугольника.

Задача 44. Докажите, что симедианная плоскость угла между гранями с площадями S_1, S_2 делит противоположное ребро в отношении $S_1^2 : S_2^2$. Эта плоскость есть геометрическое место точек, расстояния от которых до этих граней относятся как $S_1 : S_2$.

Указание. Рассмотрите два тетраэдра, на которые симедианная плоскость делит данный тетраэдр. Согласно задачам 43 и 41 отношение их объемов равно $S_1^2 : S_2^2$. У них общее основание, поэтому отношение высот тоже равно $S_1^2 : S_2^2$. Значит, и противоположное ребро, из концов которого проведены эти высоты, делится симедианной плоскостью в отношении $S_1^2 : S_2^2$. Рассмотрим высоты тетраэдров, опущенные на грани S_1, S_2. Так как объемы тетраэдров относятся как $S_1^2 : S_2^2$, эти высоты относятся как $S_1 : S_2$. И, наконец, теорема Люилье.

Задача 45 (Люилье). Докажите, что точка Люилье данного тетраэдра совпадает с точкой, расстояния от которой до граней пропорциональны их площадям. В этой точке пересекаются все симедианные плоскости.

Указание. Если площади граней равны S_i, а расстояния от точки до них равны d_i, то $S_1d_1 + \ldots + S_4d_4$ не зависит от положения точки и равно $3V$ — утроенному объему данного тетраэдра. Согласно неравенству Коши

$$(S_1^2 + \ldots + S_4^2)(d_1^2 + \ldots + d_4^2) \geqslant (S_1d_1 + \ldots + S_4d_4)^2 = 9V^2,$$

откуда следует, что

$$d_1^2 + \ldots + d_4^2 \geqslant \frac{9V^2}{S_1^2 + \ldots + S_4^2}.$$

Равенство достигается, только когда

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = S_1 : S_2 : S_3 : S_4.$$

Задача 46. Докажите, что точка Люилье совпадает с центром вписанного шара тогда и только тогда, когда тетраэдр равногранный.

Указание. См. задачу 45.

Задача 47. Докажите, что точка Люилье тетраэдра с площадями граней S_A, S_B, S_C, S_D имеет относительно этого тетраэдра барицентрические координаты $S_A^2 : S_B^2 : S_C^2 : S_D^2$.

Указание. Соединим точку Люилье с вершинами данного тетраэдра. Он разобьется на четыре тетраэдра. Их высоты, опущенные из точки Люилье на грани данного тетраэдра, относятся друг к другу как $S_A : S_B : S_C : S_D$. Так как объем тетраэдра равен трети произведения основания на высоту, отношение объемов указанных тетраэдров равно $S_A^2 : S_B^2 : S_C^2 : S_D^2$. Поэтому отношение объемов тетраэдров с общим основанием S_A равно $(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D) : S_A^2$. Значит, отношение их высот, опущенных на общее основание, такое же. Из соображений подобия следует, что если через A и точку Люилье провести прямую до пересечения с указанным основанием, то она будет делить построенный отрезок в отношении $S_A^2 : (S_B^2 + S_C^2 + S_D^2)$. Из утверждения задачи 47 немедленное следует утверждение задач 46 и следующей задачи.

Задача 48. Докажите, что в тетраэдре из трех точек: центроида, центра вписанного шара и точки Люилье — хотя бы две совпадают. Тогда совпадают все три и тетраэдр равногранный. Верно и обратное.

Указание. Используйте барицентрические координаты.

Задача 49. Когда у тетраэдра центр описанного шара совпадает с точкой Люилье? У равногранных тетраэдров это так.

10. Быстрое построение центра масс конечной системы точек

Согласно указанному выше векторному способу вычисления центра масс по формуле

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i = \frac{m_i}{m}, \quad m = m_1 + \ldots + m_n,$$

построение центра масс циркулем и линейкой (если величины масс заданы в виде длин данных n отрезков) можно выполнить следующим образом. Выберем в качестве точки приложения радиус-векторов точку, совпадающую с положением одной из заданных масс. Тогда можно считать, что вектор v_n равен 0, и не учитывать его в вычислениях. С формальной точки зрения это означает замену n на $n-1$. Вначале построим все радиус-векторы $m_i v_i$. Каждое из этих

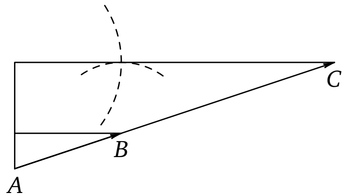

Рис. 22. Умножение вектора на число

построений (см. рис. 22) требует проведения четырех линий[26], одна из которых является продолжением вектора v_i, если через начало координат O заранее проведена подходящая прямая и на ней отложены от O отрезки с длинами 1, m_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Очевидно для проведения этих построений требуется провести $4(n-1)+n+1 = 5n-3$ линий.

Потом нужно выполнить сложение $n-1$ полученных векторов, последовательно прибавляя по вектору, используя построение, изображенное на рис. 12. Для этого требуется еще $2(n-2)$ линий. И в конце надо поделить полученный вектор на число $m_1 + \ldots + m_{n-1}$. Для этого нужно еще $n-2$ засечек циркулем для построения на данной прямой с единичным отрезком отрезка длины $m_1+\ldots+m_{n-1}$ и четыре линии для выполнения деления (см. рис. 23). Общее число проведенных линий равно $9n-6$. Но есть более эффективный способ. Нужно на каждом шаге строить центр масс системы точек $\{m_1, \ldots, m_i\}$ и отрезок длины $m_1 + \ldots + m_i$ в предположении, что центр масс системы точек $\{m_1, \ldots, m_{i-1}\}$ и отрезок длины $m_1 + \ldots + m_{i-1}$ уже построены. Для этого достаточно через точку m_i провести подходящую прямую, отложить на ней от этой точки отрезки с длинами $m_1 + \ldots + m_{i-1}$ и m_i друг за другом (для этого требуется три линии, причем будет построен отрезок длины $m_1 + \ldots + m_i$) и разделить отрезок, соединяющий точку m_i с центром масс системы точек $\{m_1, \ldots, m_{i-1}\}$, в отношении $(m_1+\ldots+m_{i-1}) : m_i$, используя построение, изображенное на рис. 23. Для этого требуется еще четыре линии. В итоге на каждом шаге используется семь линий, а общее их число равно $7(n-2)$. Этот способ предпочтительнее еще и тем, что все построенные вспомогательные точки (центры масс) лежат в выпуклой оболочке данной системы точек (значит, не требуется проводить слишком длинных линий).

[26] Здесь и далее под линиями понимаются прямые и окружности.

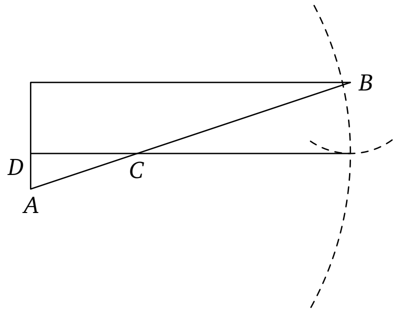

Рис. 23. Деление отрезка в данном отношении

Найти центр системы n равных масс (т. е. центроид) можно быстрее. Для этого сначала находим сумму всех векторов, используя построение, изображенное на рис. 12, а потом делим полученный вектор на n. Деление можно выполнить так, как на рис. 23, если выбрать произвольный отрезок за единицу измерения и предварительно построить отрезок длины n. Это можно сделать со сложностью $O(\log n)$ и даже меньшей (см. [7]).

В случаях $n = 3, 4, 6, 8$ есть еще более простое построение. Для $n = 3$ выше уже указывалось построение сложности 5. Для $n = 4$ применяем указанный выше общий способ, но умножение полученного вектора на $1/4$ выполняем следующим образом. Проведем отрезок через его концы, поделим его пополам и подходящую его половину — еще пополам. Каждое деление пополам способом, изображенным на рис. 16, требует проведения двух окружностей и прямой. Общая сложность этих двух делений равна 7. Но если выбрать в первом делении окружности так, чтобы они обе проходили через концы отрезка, то при делении пополам полученной его половины можно проводить окружности того же радиуса, при этом окружность с центром в конце отрезка совпадет с уже проведенной, и сложность уменьшится до 6. Полная сложность указанного построения равна 10. Если $n = 6$, то для каждой тройки строим центр с помощью пяти линий, и остается поделить пополам отрезок, соединяющий построенные две точки, со сложностью 4. Полная сложность указанного построения равна 14.

Для $n = 8$ применяем общий способ, но умножение полученного вектора на $1/8$ выполняем следующим образом. Проведем отрезок через его концы, поделим его пополам, подходящую его половину опять пополам, а потом — еще пополам. Умножение на $1/4$ выполнялось, как указано выше, со сложностью 6. Последнее деление пополам требует еще двух линий (в нем используется построенная ранее окружность). Полная сложность указанного построения равна $12+8=20$.

11. Быстрое построение центра масс многоугольника

Оценим сложность построения центра масс n-угольника при $n>4$. Выше был указан один способ его построения. Для этого его достаточно разрезать на $n-2$ треугольника, для каждого из них построить центр масс (это делается со сложностью $5(n-2)$), построить отрезки, длины которых равны площадям этих треугольников (отрезок единичной длины можно выбирать произвольно), и далее построить центр масс полученной системы $n-2$ материальных точек (в предыдущем разделе было показано, что это делается со сложностью $7((n-2)-2)=7(n-4)$). Общее число сторон у $n-2$ треугольников равно $3(n-2)$, причем n сторон n-угольника можно считать заданными, и тогда число сторон $n-2$ треугольников, лежащих внутри n-угольника, вычисляется по формуле

$$\frac{3(n-2)-n}{2}=n-3.$$

Эти стороны можно построить, проведя $n-3$ отрезка. Остается оценить сложность построения отрезка, равного площади данного треугольника. Это можно сделать, решив следующие задачи.

Задача 50. Докажите, что высоту треугольника можно построить со сложностью 4.

Указание. Разделите одну из его сторон пополам со сложностью 3 и постройте на этой стороне как на диаметре окружность, тогда точка ее пересечения с другой стороной является основанием высоты, опущенной на эту сторону, поскольку диаметр виден из любой точки окружности под прямым углом.

Задача 51. Докажите, что удвоенную площадь треугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью 10.

Указание. Удвоенная площадь равна произведению основания на высоту. Для выполнения умножения отрезков следует применить прием, изображенный на рис. 22. Единичный отрезок можно отложить на основании (выбрав его так, чтобы он был короче основания), а на боковой стороне отложить высоту, тогда отрезок на боковой стороне, равный произведению основания на высоту, строится со сложностью 6. Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить как

$$(n-3)+5(n-2)+10(n-2)+7(n-4)=23n-61.$$

Рассмотрим другой способ построения. Разобьем n-угольник (для простоты предполагаем, что он выпуклый) на четырехугольники (и в случае нечетного n еще один треугольник). Для этого в разбиении на $n-2$ треугольника объединим пары треугольников с общей стороной в четырехугольники. В случае четного n число полученных четырехугольников равно $\frac{n}{2}-1$, а в случае нечетного — $\frac{n-3}{2}$. Построим у каждого из этих четырехугольников центр масс способом, указанным в разделе 6. Сложность этого построения равна

$$(n-3)+16\left(\frac{n}{2}-1\right)=9n-19$$

(далее рассматриваем случай четного n). Построим отрезки, длины которых равны площадям этих четырехугольников. И наконец, построим центр масс полученной системы $\frac{n}{2}-1$ материальных точек со сложностью $7\left(\frac{n}{2}-3\right)$. Остается оценить сложность построения системы отрезков, пропорциональных площадям построенных четырехугольников.

Задача 52. Докажите, что удвоенную площадь четырехугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью 16.

Указание. Опустим на диагональ четырехугольника перпендикуляры из концов другой диагонали. Удвоенная площадь четырехугольника равна произведению этой диагонали на сумму длин указанных перпендикуляров. Построить оба перпендикуляра можно с помощью задачи 29 со сложностью 8. На одной из сторон четырехугольника откладываем отрезок, длина которого равна сумме этих перпендикуляров. Это можно сделать со сложностью 3. На диагонали откладываем отрезок единичной длины со сложностью 1. Тогда произведение диагонали на сумму перпендикуляров строится со сложностью 4 в виде отрезка на стороне четырехугольника.

Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить при четном n как

$$9n-19+16\left(\frac{n}{2}-1\right)+7\left(\frac{n}{2}-3\right)=20{,}5n-56.$$

При нечетном n оценка имеет вид

$$(n-3)+8(n-3)+5+\frac{7(n-1)}{2}+8(n-3)+10=20{,}5n-39{,}5.$$

Как видно, второй способ несколько более эффективен.

Задача 53. Оцените двумя указанными способами сложность построения отрезка, длина которого равна площади данного n-угольника.

12. Еще некоторые приложения механики к геометрии

Хотя нашей целью было нахождение геометрическими способами центров тяжести различных геометрических фигур и тел, попутно было получено решение многих интересных задач с помощью использования понятия центра масс. Так как это понятие было аксиоматизировано и была указана возможность доказательства этих аксиом с использованием обычной геометрической аксиоматики, приведенные решения можно считать не менее строгими, чем решения, полученные обычным, чисто геометрическим способом. Читатель, желающий ознакомиться с другими примерами решения геометрических задач с помощью понятия центра масс (и других соображений из механики), может сделать это, например, по книгам [3, 12, 13]. В книге [3] приведено много задач с решениями, основанными на использовании понятия центра масс (причем рассматриваются не только отрицательные, но и комплексные массы — в последнем случае эта тематика тесно смыкается с применением комплексных чисел в геометрии).

Далее приводится несколько примеров использования для решения задач различных других механических соображений. Так как они уже не выглядят такими строгими, как чисто геометрические, указываются также и пути получения таких решений.

Следующая задача обобщает задачу 36.

Задача 54. Докажите, что $\sum_i m_i r_i^2$ (взвешенная сумма квадратов расстояний от произвольной точки M до данных точек P_i при $m_i>0$)

минимальна только в такой точке M, что сумма векторов $\overline{MP_i}$, умноженных на m_i, равна нулю. Эта точка совпадает с центром масс m_i, помещенных в точки P_i.

Указание. Если взять за начало координат любую точку O и обозначить векторы $\overline{OP_i}$ как r_i, то центр масс будет в конце вектора

$$\frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i r_i$$

с началом в начале координат. Применим следующую формулу Лейбница — Лагранжа для *момента инерции* системы точек:

$$m_1r_1^2+\ldots+m_nr_n^2=m_1(r_1-r)^2+\ldots+m_n(r_n-r)^2+(m_1+\ldots+m_n)r^2,$$

где $r=\frac{1}{m}\sum_i m_ir_i$, $m=\sum_i m_i$ — центр масс этой системы. Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned}&m_1(r_1-r)^2+\ldots+m_n(r_n-r)^2=\\&\quad=m_1r_1^2+\ldots+m_nr_n^2+(m_1+\ldots+m_n)r^2-2(m_1r_1+\ldots+m_nr_n,r),\end{aligned}$$

а

$$(m_1r_1+\ldots+m_nr_n,r)=(m_1+\ldots+m_n)r^2.$$

Формула Лейбница — Лагранжа справедлива и в пространственном случае. Из нее, в частности, следует, что минимум суммы квадратов расстояний от точки до вершин данного треугольника (тетраэдра) достигается в его центроиде (задача 36).

Аналогичная задача про минимизацию обычной взвешенной суммы расстояний оказывается, как ни странно, существенно более трудной. Рассмотрим ее для примера в случае трех точек.

Задача 55. Найдите в треугольнике ABC точку M, для которой сумма $m_1|AM|+m_2|BM|+m_3|CM|$ минимальна.

Указание. Построим треугольник с длинами сторон m_i (рассматриваем случай, когда это возможно). Пусть его внешние углы равны α_i. Проводя из одной точки отрезки длины m_i, попарно образующие между собой углы α_i, получаем три вектора, сумма которых равна нулю. Найдем в треугольнике ABC точку M, из которой его стороны видны под углами α_i, тогда векторы, направленные из нее в вершины треугольника с соответствующими длинами m_i, будут в сумме равны нулю. Это и есть искомая точка.

Если же треугольник с длинами сторон m_i не существует, то искомая точка совпадает с одной из вершин A, B, C

В книге [14] приведена красивая механическая интерпретация этой задачи. Представим себе, что данные точки P_i лежат на столе. Проделаем в нем дырки в этих точках, возьмем веревки достаточно большой равной длины l, свяжем их концы в узел и пропустим свободные концы в дырки, оставив узел на поверхности стола. Привяжем к концам веревок грузы с массами m_i. Тогда узел переместится в точку, которая и будет иметь минимальную сумму. Дело в том, что согласно принципам механики такая система должна прийти в состояние, в котором ее центр масс (т. е. центр масс всех грузов m_i) должен занять самое низкое возможное положение. Но высота центра масс этих грузов (относительно уровня стола) равна

$$-\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i},$$

и она будет минимальной, когда

$$\sum_i m_i h_i = \sum_i m_i(l - r_i) = l\sum_i m_i - \sum_i m_i r_i$$

максимальна, т. е. когда $\sum_i m_i r_i$ минимальна, где $r_i = l - h_i$ — расстояния от узла до точек P_i. В случае равных масс и n точек эта задача остается такой же трудной для геометрического решения. При $n = 3$ такое решение сравнительно несложно, искомая точка называется точкой Торричелли и уже упоминалась выше. При $n = 4$ в случае, когда точки образуют выпуклый четырехугольник, решение еще проще — искомая точка есть точка пересечения его диагоналей. Однако уже при $n = 5$ найти эту точку циркулем и линейкой, вообще говоря, невозможно.

Возвращаясь к моменту инерции, заметим, что известна формула для вычисления момента инерции относительно центра масс через попарные расстояния между точками. Напомним, что квадраты расстояний между точками (концами векторов) r_i и r_j равны $(r_i - r_j)^2$, а $r = \frac{1}{m}\sum_i m_i r_i$, $m = \sum_i m_i$ — центр масс этой системы.

Задача 56 (Лагранж — Пуансо — Якоби). Докажите, что

$$m_1(r_1 - r)^2 + \ldots + m_n(r_n - r)^2 = \frac{1}{m}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_i m_j (r_i - r_j)^2.$$

Указание. Обозначим через J_i момент инерции относительно точки r_i, т. е.

$$J_i = m_1(r_1 - r_i)^2 + \ldots + m_n(r_n - r_i)^2.$$

Согласно указанной выше формуле Лейбница — Лагранжа

$$J_i = J + m(r - r_i)^2, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad J = m_1(r_1 - r)^2 + \ldots + m_n(r_n - r)^2.$$

Умножим обе части этого равенства на m_i и сложим почленно полученные равенства. Получим равенство

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_i m_j (r_i - rj)^2 = mJ + m\big(m_1(r_1 - r)^2 + \ldots + m_n(r_n - r)^2\big) = 2mJ.$$

В книге [3] указано красивое применение формулы из задачи 56 для вывода формулы Эйлера — Чаппла для расстояния между центрами вписанного и описанного кругов данного треугольника.

Задача 57. Докажите, что если радиусы описанного и вписанного кругов треугольника равны R и r, то квадрат расстояния между их центрами равен $R(R-2r)$.

Указание. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Поместим в противоположные им вершины A, B, C массы a, b, c. Согласно задаче 5 (см. также раздел 5) центр масс этой системы точек совпадет с центром вписанного в треугольник круга. Момент инерции этой системы относительно центра описанного круга по определению равен

$$J_O = aR^2 + bR^2 + cR^2 = 2pR^2,$$

где p — полупериметр. Момент инерции этой системы относительно ее центра масс (т. е. центра вписанного круга) согласно формуле Лагранжа — Пуансо — Якоби (задача 56) равен

$$J = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + acb^2) = abc.$$

Согласно формуле Лейбница — Лагранжа

$$2pR^2 - abc = J_O - J = (a+b+c)d^2 = 2pd^2,$$

откуда следует, что

$$d^2 = R^2 - \frac{abc}{2p} = R(R-2r),$$

так как по широко известным формулам

$$pr = S = \frac{abc}{4R},$$

а значит,

$$\frac{abc}{2p} = 2Rr.$$

Укажем еще одно применение[27] задач 54, 56.

Задача 58. Пусть стороны треугольника ABC равны a, b, c. Тогда для произвольной точки P справедливо неравенство

$$a|PA|^2 + b|PB|^2 + c|PC|^2 \geqslant abc.$$

Указание. Поместим в вершины A, B, C массы a, b, c. Тогда, как и в решении предыдущей задачи, центр масс M этой системы совпадет с центром вписанного в треугольник круга, а сумма

$$a|MA|^2 + b|MB|^2 + c|MC|^2,$$

равная моменту инерции системы относительно M, будет равна

$$J = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + acb^2) = abc.$$

Воспользуемся задачей 54: $\sum_i m_i r_i^2$ (взвешенная сумма квадратов расстояний r_i от произвольной точки M до данных точек P_i при $m_i > 0$) минимальна только в такой точке M, что сумма векторов MP_i, умноженных на m_i, равна нулю. Эта точка совпадает с центром масс m_i, помещенных в точки P_i. В случае $m_1 = a$, $m_2 = b$, $m_3 = c$ получаем, что

$$a|PA|^2 + b|PB|^2 + c|PC|^2 \geqslant a|MA|^2 + b|MB|^2 + c|MC|^2 = abc.$$

В задаче 54 мы воспользовались формулой Лагранжа

$$m_1 r_1^2 + \ldots + m_n r_n^2 = m_1(r_1 - r)^2 + \ldots + m_n(r_n - r)^2 + (m_1 + \ldots + m_n)r^2$$

для доказательства неравенства

$$m_1 r_1^2 + \ldots + m_n r_n^2 \geqslant m_1(r_1 - r)^2 + \ldots + m_n(r_n - r)^2,$$

означающего, что минимальное значение момента инерции достигается, только когда он вычисляется относительно центра масс. Но из той же формулы следует (при $m_i > 0$) и неравенство

$$m_1 r_1^2 + \ldots + m_n r_n^2 \geqslant (m_1 + \ldots + m_n)r^2,$$

которое обращается в равенство, только когда все r_i равны (это равносильно тому, что все они равны r). Если векторы r_i одномерные (т. е. точки расположены на одной прямой, или, другими словами,

[27] Когда книга уже редактировалась, задача 58 была предложена автору его бывшим однокурсником Франком Ремом (Лейпциг, Германия).

$r_i = x_i$ — это просто действительные числа), то это неравенство можно переписать в виде

$$m_1x_1^2 + \ldots + m_nx_n^2 \geqslant (m_1 + \ldots + m_n)\Big(\frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}\Big)^2 = \\ = \frac{(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)^2}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Подставляя в него $m_i = b_i^2$, $x_i = a_i/b_i$, при $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, получаем неравенство

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + \ldots + b_n^2},$$

равносильное неравенству Коши

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2$$

(слагаемые при $b_i = 0$ обращаются в нуль). Сделав подстановку $m_i = b_i$, $x_i = a_i/b_i$, получаем из него другое интересное неравенство (на самом деле равносильное неравенству Коши):

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}$$

(оно предлагалось в 1987 г. на Московской математической олимпиаде). Наконец, заменяя дроби m_i/m, где $m = m_1 + \ldots + m_n$, на α_i, можно переписать полученное неравенство как

$$\alpha_1x_1^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2 \geqslant (\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n)^2, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

В таком виде оно просто означает выпуклость функции x^2. Выбрав $\alpha_i = 1/n$, получаем, например, неравенство

$$n(x_1^2 + \ldots x_n^2) \geqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2.$$

Для следующей простой, но красивой задачи (заимствованной из книги [12]) приведем два решения — геометрическое и механическое (из области механики жидкости и газа).

Задача 59. В выпуклом многоугольнике из любой точки можно опустить перпендикуляр на одну из сторон так, что его основание попадет на сторону, а не на ее продолжение.

Указание. Опустим перпендикуляры на все стороны и выберем из них наименьший. Если его основание попадает на продолжение соответствующей стороны, то он пересекает другую сторону. Тогда перпендикуляр, опущенный на нее, будет короче, что невозможно.

Есть «механическое» решение этой задачи. Сделаем «колесо» в виде этого многоугольника так, чтобы его центр масс совпал с данной точкой. Если все перпендикуляры из нее падают на продолжения «своих» сторон, то положение этого колеса неустойчиво, оно опрокинется на другую сторону, потом еще на другую, покатится и будет катиться бесконечно долго, что невозможно (так как невозможен вечный двигатель). На самом деле колесо может покатиться, но остановится в том положении, когда центр масс займет самое низкое положение (будет проектироваться на ближайшую к нему сторону), — это гарантирует один из принципов механики.

Задача естественным образом обобщается и на выпуклые многогранники.

У следующей красивой задачи также приведем два решения — геометрическое и механическое.

Задача 60. Обозначим через S_i векторы, поставленные на грани тетраэдра перпендикулярно им и направленные вне тетраэдра, имеющие длины, равные площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

Указание. Проверьте, что проекция суммы всех векторов на любой из них равна нулю. Для этого примените формулы для площади проекции плоской фигуры.

Задача 60 имеет обобщение для произвольного выпуклого многогранника («теорема Минковского о еже») и следующее «механическое» решение. Заполним многогранник идеальным газом (и предположим, что на него не действуют никакие внешние силы). Сила давления газа на грани пропорциональна их площадям и перпендикулярна граням. Сумма сил должна равняться нулю, иначе многогранник полетит (и получится вечный двигатель).

Аналогичное утверждение верно и для любого многоугольника (для доказательства надо взять прямоугольную призму, основанием которой является данный многоугольник, и наполнить ее газом). В частности, если многоугольник правильный, то отсюда следует, что сумма векторов, выходящих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю (впрочем, этот факт легко доказывается и чисто геометрически).

Идея использования сосуда подходящей формы, заполненного газом, широко используется в книге [13]. С ее помощью (а также с помощью соображений, связанных с использованием *моментов* *сил* относительно данной оси) в ней доказываются теорема о пересечении срединных перпендикуляров к сторонам треугольника в одной точке, теорема Пифагора, теорема о касательной и секущей, теорема о двух хордах (однако геометрические доказательства этих теорем ничуть не сложнее механических).

Соображения, связанные с рассмотрением центра тяжести, можно использовать для вычисления объемов различных тел и площадей их поверхности. Много таких примеров разобрано в книге [13]. Там показано, как вычислить объем цилиндроида, т. е. тела, ограниченного снизу и сверху плоскостями, а с боков — цилиндрической поверхностью, т. е. поверхностью, образованной семейством параллельных друг другу прямых (называемых ее образующими). При этом оказывается, что образующие параллельны прямой, соединяющей центры тяжести оснований цилиндроида, а если его основание перпендикулярно образующим его боковой поверхности, то его объем равен произведению площади основания на длину перпендикуляра, опущенного на основание из центра масс фигуры, ограничивающей цилиндроид сверху. Из этой теоремы далее выводятся формулы для объема пирамиды. С помощью различных соображений (использующих понятие центра давления жидкости или понятие статического момента площади относительно оси) в книге [13] доказываются теоремы Гюльдена об объеме и площади поверхности тел вращения: объем тела вращения равен произведению площади фигуры, вращением которой вокруг данной оси оно получено, на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести упомянутой фигуры, а поверхность тела вращения, полученного вращением некоторой кривой вокруг данной оси, равна длине этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести упомянутой кривой. Обе теоремы можно применять для вычисления объемов и поверхностей тел вращения, если известны соответствующие центры масс, и наоборот, находить центры масс, если известны объемы и площади поверхности тел вращения. В частности, таким способом легко найти центр масс полукруга и центр масс половины окружности. Читатель может сделать это самостоятельно или заглянуть, например, в книгу [13]. Другое (чисто математическое) изложение этих вопросов можно найти в книге [3]. Мы не рассматриваем их здесь, так как они предполагают знакомство с теорией пределов.

В книге [13] также приведено много примеров доказательства геометрических теорем с помощью использования соображений статики (параллелограмм сил, момент силы относительно оси и т. п.). В частности, доказаны теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис, высот и теорема Чевы (из которой все упомянутые теоремы следую как частные случаи). Однако, на наш взгляд, геометрические доказательства этих теорем широко известны и достаточно просты (а теоремы Чевы и Менелая естественно доказывать с помощью барицентрических координат, как в книге [3]), поэтому использование соображений из статики для их доказательства представляется несколько искусственным. Однако заметим, что в книге [13] тем же методом доказана, например, сравнительно малоизвестная теорема о том, что точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

13. Центры масс и неравенство Чебышёва

Знаменитый русский математик (и механик) П. Л. Чебышёв открыл следующие красивые неравенства.

Пусть даны упорядоченные по возрастанию наборы чисел $a_1 \leqslant \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Тогда справедливо неравенство

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n).$$

Если данные наборы чисел упорядочены в противоположных направлениях (один в возрастающем порядке, другой в убывающем), то знак в неравенстве меняется на противоположный. Равенство достигается, только когда хотя бы в одном из наборов все числа равны.

Приведем три доказательства этих неравенств. Рассмотрим только случай, когда оба набора возрастают (второй случай доказывается аналогично). Первое доказательство основано на использовании понятия центра масс. В нем будем предполагать, что $b_i > 0$. Числа b_i будут играть роль масс, и далее мы их переобозначим как m_i. Неравенство Чебышёва можно переписать так:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \frac{a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Его правая часть совпадает с координатой центра тяжести системы материальных точек с массами m_i, расположенных на прямой в точках с координатами a_i. Левая часть (среднее арифметическое чисел a_i) также совпадает с координатой центра тяжести подобной же системы материальных точек, но в предположении равенства их масс.

Далее без ограничения общности можно считать, что сумма всех масс равна 1, и правая часть принимает тогда вид $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, и набор чисел $\{\alpha_i\}$ монотонно возрастает. Интуитивно очевидно, что если произвольно переставить друг с другом массы α_i, то центр масс такой системы будет находиться в самом правом крайнем положении, когда бóльшие массы расположены в дальних (т. е. имеющих бóльшие координаты) точках (т. е. набор $\{\alpha_i\}$ возрастает), и в самом крайнем левом положении, когда бóльшие массы расположены в ближних точках (т. е. набор $\{\alpha_i\}$ убывает). В случае, когда все массы равны, их перестановка ничего не меняет и центр тяжести всегда имеет координату, равную среднему арифметическому координат точек. Интуитивно очевидно, что он будет расположен между указанными выше крайней левой и крайней правой позициями, что и означает справедливость неравенства Чебышёва в обоих случаях (одинакового и противоположного упорядочений). Приведем более строгое рассуждение. Если все α_i равны, то доказывать нечего. В противном случае найдем в последовательности $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \ldots \alpha_n$ два таких числа α_k, α_{k+1}, что $\alpha_k < 1/n \leqslant \alpha_{k+1}$. Если $\alpha_{k+1} = 1/n$, то найдем ближайшее следующее за ним число $\alpha_l > 1/n$, иначе выберем $l = k+1$. Начнем увеличивать массу α_k и уменьшать массу α_l так, чтобы сумма их не изменялась (остальные массы не изменяем). Тогда величина

$$\alpha_k a_k + \alpha_l a_l = \alpha_k a_k + (s - \alpha_k) a_l = s a_l - \alpha_k (a_l - a_k),$$

очевидно, убывает, т. е. центр масс системы двух точек α_k, α_l смещается влево (в сторону уменьшения его координаты), и то же самое, очевидно, верно для центра масс системы всех точек $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Остановим точку α_k, когда $\alpha_k = 1/n$. С новой системой масс (в которой количество масс, равных $1/n$, увеличилось на 1) повторим аналогичную операцию и сместим ее центр масс дальше влево. Повторяя указанные операции, смещаем центр масс все левее и левее, пока процесс не остановится, из-за того что в полученной системе все массы будут равны $1/n$. Из доказанного следует строгое неравенство

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n > \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

В приведенном доказательстве не использовалось сделанное замечание о том, что при перестановке в формуле $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ коэффициентов α_i указанная сумма принимает максимальное значение, когда набор $\{\alpha_i\}$ возрастает, и минимальное — когда он убывает. Этот факт справедлив и без ограничений на α_i.

Задача 61. Пусть $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ и $\pi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ — любая из $n!$ перестановок чисел $\{1,\ldots,n\}$. Докажите, что справедливы неравенства

$$a_1\alpha_n + \ldots + a_n\alpha_1 \leqslant a_1\alpha_{\pi(1)} + \ldots + a_n\alpha_{\pi(n)} \leqslant a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n.$$

Равенство достигается когда или все α_i равны, или все a_i равны.

Указание. Если перестановка $\alpha_{\pi(1)},\ldots,\alpha_{\pi(n)}$ набора $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ отлична от монотонно возрастающей последовательности $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, то найдутся $\alpha_{\pi(k)} > \alpha_{\pi(k+1)}$. Поменяем местами эти коэффициенты и вместо суммы $\alpha_{\pi(k)}a_k + \alpha_{\pi(k+1)}a_{k+1}$ получим не меньшую сумму $\alpha_{\pi(k+1}a_k + \alpha_{\pi(k)}a_{k+1}$, так как

$$\alpha_{\pi(k+1)}a_k + \alpha_{\pi(k)}a_{k+1} - (\alpha_{\pi(k)}a_k + \alpha_{\pi(k+1)}a_{k+1}) = \\ = (\alpha_{\pi(k)} - \alpha_{\pi(k+1)})(a_{k+1} - a_k) \geqslant 0.$$

Очевидно, при такой перестановке полная сумма $a_1\alpha_{\pi(1)}+\ldots+a_n\alpha_{\pi(n)}$ тоже не уменьшится (так как в ней меняются только указанные выше два слагаемых). Повторяя указанную операцию, можно немонотонную перестановку $\alpha_{\pi(1)},\ldots,\alpha_{\pi(n)}$ преобразовать в монотонную.

Задача 61 имеет много различных приложений[28]. С ее помощью можно дать другое доказательство неравенств Чебышёва (в котором не предполагается положительность чисел в наборах).

Действительно, пусть для краткости $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = S$. Применяя задачу 61 к $n-1$ различным циклическим перестановкам набора $\{b_i\}$, получаем неравенства

$$a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_{n-1}b_n + a_nb_1 \leqslant S,$$
$$a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_{n-2}b_n + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 \leqslant S$$

и так далее вплоть до

$$a_1b_n + a_2b_1 + a_3b_2 + \ldots + a_nb_{n-1} \leqslant S.$$

Складывая почленно эти неравенства, а также равенство

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = S,$$

[28] Например, она используется в обосновании корректности алгоритма Хаффмена нахождения префиксного алфавитного кода с минимальной средней длиной кодового слова.

группируя вместе подходящие слагаемые и вынося за скобки общие множители, получим

$$a_1(b_1+\ldots+b_n)+a_2(b_1+\ldots+b_n)+\ldots+a_n(b_1+\ldots+b_n)\leqslant nS,$$

и, следовательно,

$$(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)\leqslant nS=n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n).$$

Равенство достигается, когда все складываемые неравенства превращаются в равенство, т. е. когда один из наборов состоит из одинаковых чисел.

Третье доказательство[29] (самое короткое) основано на ловком использовании красивого (и неочевидного) тождества

$$n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)-(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)=$$
$$=(n-1)(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j+a_jb_i)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)(b_i-b_j).$$

Очевидно, что если наборы $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ одинаково упорядочены, то всегда $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$, так как (a_i-a_j), (b_i-b_j) одного знака, поэтому и их сумма неотрицательна, что вместе с указанным тождеством доказывает неравенство в первом случае. Во втором случае (при противоположных упорядочениях) (a_i-a_j), (b_i-b_j) разных знаков, поэтому $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\leqslant 0$, вся сумма неположительна и неравенство также доказано.

Неравенство Чебышёва имеет разнообразные обобщения, например, для одинаково упорядоченных наборов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ и неотрицательных μ_i, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$(a_1\mu_1+\ldots+a_n\mu_n)(b_1\mu_1+\ldots+b_n\mu_n)\leqslant a_1b_1\mu_1+\ldots+a_nb_n\mu_n.$$

Оно превращается в обычное неравенство при выборе μ_i, равных друг другу. Доказательство (с использованием центров масс) можно найти, например, в книге [3] (оно подобно приведенному выше).

Неравенство Чебышёва имеет интегральные аналоги (указанные самим Чебышёвым), в которых суммы заменены на соответствующие интегралы. Приведенное третье доказательство, к примеру, можно превратить и в доказательство интегрального неравенства Чебышёва[30].

---

[29] Принадлежащее ученику Чебышёва А. Н. Коркину.

[30] Американский математик Ф. Франклин предложил его сразу в варианте с интегралами, впрочем, на несколько лет позже А. Н. Коркина.

Кроме механической интерпретации известна также геометрическая интерпретация неравенства Чебышёва. Чтобы ее получить, отложим на сторонах прямого угла от его вершины отрезки длины $a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n$ на одной стороне и отрезки длины $b_1 \leqslant b_2 \ldots \leqslant b_n$ на другой (все отрезки начинаются в вершине угла). Рассмотрим треугольники, образованные отрезками a_i, b_i, и треугольник, образованный отрезками длины

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}, \qquad \frac{b_1+\ldots+b_n}{n}$$

(средними значениями длин указанных отрезков). Тогда площадь последнего треугольника не больше среднего арифметического площадей остальных n треугольников.

Неравенство Чебышёва имеет много полезных следствий. Например, в случае одинаково упорядоченных и положительных чисел a_i, b_i, c_i двукратное применение неравенства Чебышёва дает следующее его обобщение:

$$\begin{aligned}(a_1\mu_1+\ldots+a_n\mu_n)(b_1\mu_1+\ldots+b_n\mu_n)(c_1\mu_1+\ldots+c_n\mu_n) \leqslant \\ \leqslant (a_1b_1\mu_1+\ldots+a_nb_n\mu_n)(c_1\mu_1+\ldots+c_n\mu_n) \leqslant \\ \leqslant a_1b_1c_1\mu_1+\ldots+a_nb_nc_n\mu_n,\end{aligned}$$

которое и дальше можно обобщать в том же духе.

Приведем для примера несколько задач, в решении которых полезно использовать неравенство Чебышёва.

Задача 62. Пусть $x_i>0$, $0<y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_n$ и последовательность дробей $r_i=x_i/y_i$ также возрастает. Докажите, что

$$\frac{r_1+\ldots+r_n}{n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}.$$

Если же последовательность r_i убывает, то

$$\frac{r_1+\ldots+r_n}{n} \geqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}.$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва при $a_i=r_i$, $b_i=y_i$, $i=1,\ldots,n$.

Задача 63. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим положительных чисел:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

Указание. Перепишите неравенство в виде

$$(a_1+\ldots+a_n)\Big(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\Big)\geqslant n^2$$

и примените неравенство Чебышёва.

Задача 64. Докажите для положительных чисел неравенство

$$(a_1\ldots a_n)^{(a_1+\ldots+a_n)/n}\leqslant a_1^{a_1}\ldots a_n^{a_n}.$$

Указание. Прологарифмируйте неравенство и примените неравенство Чебышёва.

Задача 65 (из книги Полиа и Сегё «Задачи и теоремы из анализа»). В треугольнике со сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C (измеренными в радианах) справедливо неравенство

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}.$$

Равенство верно только для правильного треугольника.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $0<a\leqslant\leqslant b\leqslant c$. Тогда $0<A\leqslant B\leqslant C$, $A+B+C=\pi$ и согласно неравенству Чебышёва

$$\pi(a+b+c)=(A+B+C)(a+b+c)\leqslant 3(aA+bB+cC).$$

Равенство верно, только когда $a=b=c$ или $A=B=C$, что возможно только для правильного треугольника.

Задача 66. В обозначениях задачи 65 докажите неравенство

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва (для противоположно упорядоченных наборов) и докажите, что

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C\leqslant\frac{a+b+c}{3}(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Остается доказать, что $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3/2$. Для доказательства проведите из центра вписанного в треугольник круга векторы e_i в точки касания. Так как скалярный квадрат суммы $e_1+e_2+e_3$ неотрицателен, получаем, что

$$\begin{aligned}(e_1+e_2+e_3)^2=e_1^2+e_2^2+e_3^2+2\big((e_1,e_2)+(e_2,e_3)+(e_1,e_3)\big)=\\=3r^2-2r^2(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant 0.\end{aligned}$$

Задача 67 (Московская математическая олимпиада 1982 г.). Докажите для сторон произвольного треугольника неравенство

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4 \leqslant (a+b+c)abc.$$

Указание. Подставьте в неравенство из задачи 66 выражения для косинусов по формулам теоремы косинусов

$$\cos A = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

и т. д. и воспользуйтесь равенством

$$a\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}+b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4}{2abc}.$$

Задача 68. В обозначениях задачи 65 докажите неравенство

$$\frac{a\cos\dfrac{A}{2}+b\cos\dfrac{B}{2}+c\cos\dfrac{C}{2}}{a+b+c} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва и потом неравенство

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leqslant 3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

(оно следует, например, из выпуклости косинуса на отрезке $[0, \pi/2]$).

Задача 69. В обозначениях задачи 65 докажите неравенство

$$\frac{a\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}+b\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}+c\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва и потом неравенство

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}$$

(оно следует, например, из выпуклости тангенса на отрезке $[0, \pi/2]$).

Задача 70. В обозначениях задачи 65 докажите для остроугольного треугольника неравенство

$$\frac{a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B+c\operatorname{tg}C}{a+b+c} \geqslant \sqrt{3}.$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва и потом неравенство

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C \geqslant 3\sqrt{3}$$

(оно следует, например, из выпуклости тангенса на отрезке $[0, \pi/2]$).

Много других задач на применение неравенства Чебышёва можно найти в статье [15]. Например, можно из него вывести неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, неравенство Коши — Буняковского и др.

14. Центры масс, моменты инерции и теория вероятностей

П. Л. Чебышёв и его знаменитый ученик А. А. Марков много занимались задачами о предельных значениях интегралов, которые они явно формулировали в терминах распределений масс на данном отрезке и моментов этих распределений. А. А. Марков в письме к знаменитому французскому математику Шарлю Эрмиту сформулировал одну из таких задач следующим образом. Требуется на данном отрезке $[0, l]$ распределить данную массу таким образом, чтобы ее центр масс находился в заданной точке, момент инерции относительно нуля тоже был задан, момент третьего порядка, т. е. сумма $m_i x_i^3$, где x_i — координата точки, в которой находится масса m_i, также был задан, и т. д. все моменты вплоть до некоторого n-го порядка заданы, а масса, попавшая в заданный отрезок $[a, b]$ (т. е. сумма всех m_i при $x_i \in [a, b]$), была бы максимальна (или минимальна). Марков существенно продвинулся в решении подобных задач, поставленных Чебышёвым, и подобная тематика продолжала активно развиваться и в XX веке под названием теории моментов.

Чебышёв и Марков пришли к этим задачам в связи с некоторыми прикладными вопросами, в том числе и связанными с теорией вероятностей. Как это ни странно на первый взгляд, но некоторые понятия теории вероятностей в определенном смысле аналогичны понятиям центра масс и момента инерции. Действительно, если предположить, что массы m_i сосредоточены в точках прямой с координатами x_i и их сумма $m_1 + \ldots + m_n = 1$, то после смены обозначений m_i на p_i (как принято в теории вероятности) формула для центра масс

$$m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n$$

превращается в формулу для математического ожидания случайной величины ξ, принимающей значения x_i с вероятностями p_i:

$$M\xi = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n.$$

А формула для момента инерции относительно точки x превращается в формулу для математического ожидания случайной величины $(\xi - x)^2$:

$$M(\xi - x)^2 = p_1(x_1 - x)^2 + \ldots + p_n(x_n - x)^2.$$

При выборе $x = M\xi$ эта формула превращается в формулу для дисперсии случайной величины ξ:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Формула Лагранжа, связывающая момент инерции относительно нуля и момент инерции относительно центра масс, превращается в классическую формулу для вычисления дисперсии (так как сумма масс равна 1):

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

А формула Лагранжа — Пуансо — Якоби для момента инерции относительно центра масс превращается в еще одну формулу для вычисления дисперсии:

$$D\xi = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_i p_j (x_i - x_j)^2.$$

Эта формула интересна тем, что в ней не используется величина математического ожидания $M\xi$, но для вычислений она менее удобна, так как требует порядка n^2 арифметических операций, а первая формула — только лишь порядка n операций.

Литература

[1] *Мах Э.* Механика. М.: URSS, 2011.

[2] *Жуковский Н. Е.* Теоретическая механика. М.: URSS, 2011.

[3] *Балк М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1981. (Библиотечка Кванта; Вып. 61).

[4] *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. М.: Мир, 1966.

[5] *Дворянинов С. В., Краутер З.* Чем центр тяжести треугольника отличается от центра тяжести четырехугольника // Математическое образование. 2012. Т. 1, № 61. С. 10–19.

[6] *Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Мир, 1978.

[7] *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005.

[8] *Гашков С. Б.* Геометрические неравенства. М.: Либроком, 2014.

[9] *Гашков С. Б.* Современная элементарная алгебра. М.: МЦНМО, 2006.

[10] *Мякишев А. Г.* Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2009.

[11] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 3. М.: МЦНМО, 2009.

[12] *Успенский В. А.* Некоторые применения механики к математике. М.: Физматгиз, 1958. (Популярные лекции по математике; Вып. 27).

[13] *Коган Б. Ю.* Приложение механики к геометрии. М.: Наука, 1965. (Популярные лекции по математике; Вып. 41).

[14] *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.

[15] *Храбров А.* Неравенство Чебышёва // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2011 г. С. 104–126.

Оглавление

Гашков Сергей Борисович

Центры тяжести и геометрия

Подписано в печать 29.05.2015 г. Формат $60\times90\,{}^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.