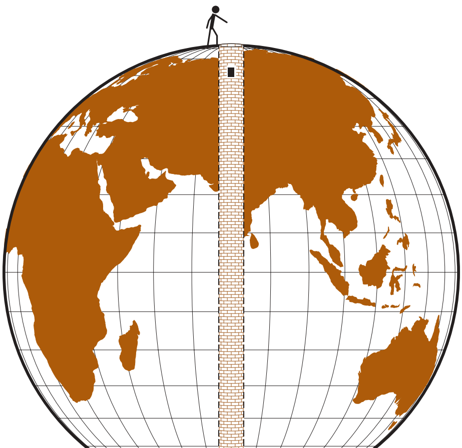
Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 23

М. А. Шубин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2003

УДК 517.91/.93
ББК 22.161
Ш95

Аннотация

Эта брошюра основана на лекциях, дважды прочитанных автором в Красноярской краевой летней школе по естественным наукам школьникам, окончившим 10-й класс. В ней кратко объясняются основные понятия математического анализа (производная и интеграл) и даются простейшие приложения к физическим задачам, основанные на составлении и решении дифференциальных уравнений.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников, студентов, учителей.

Издание осуществлено при поддержке Московского комитета образования и Московской городской Думы.

ISBN 5-94057-075-5

Михаил Александрович Шубин.

Математический анализ для решения физических задач.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2003. — 40 с.: ил.

Редактор *А. А. Ермаченко.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 6/II 2003 года. Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Физ. печ. л. 2,50. Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 2,31. Тираж 5000 экз. Заказ 471.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический анализ в виде дифференциального и интегрального исчислений был создан в XVII веке как инструмент естествознания. Его ошеломляющая эффективность стала очевидна сразу, и с тех пор он прочно вошёл в арсенал учёных и инженеров. Поэтому раннее и быстрое знакомство с этим предметом чрезвычайно полезно для школьников, а также студентов всех специальностей. При этом он должен с самого начала излагаться в связи с его приложениями в физике и других естественных науках. Ради быстрого знакомства можно обойтись без обязательной математической строгости, которая может быть добавлена позже, когда основные идеи уже ясны. В этой брошюре сделана попытка подобного изложения. Мне хотелось сделать изложение максимально кратким и, в то же время, показать реальные приложения. Образцом для меня служила книга Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих» (М., 1960)*). Однако эта книга всё-таки требует значительного времени для изучения. Чтобы ещё больше сократить путь к приложениям, я использовал знания по математическому анализу, которые должны иметь школьники после окончания 10-го класса.

В сущности, предмет, о котором идёт речь, — это простейшие дифференциальные уравнения, возникающие в прикладных задачах. Быть может, читателям небезынтересно узнать, что основное открытие И. Ньютона, которое он счёл нужным засекретить и опубликовал в виде анаграммы, состоит в следующем: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями»**). Яркий пример применения дифференциальных уравнений — открытие Нептуна, сделанное в 1846 г. Дж. Адамсом и У. Леверье на основе независимо проведённых расчётов с использованием наблюдавшейся аномалии в движении Урана — последней известной тогда планеты. Мне хотелось, чтобы школьник, активно интересующийся математикой, обратил внимание на важность дифференциальных уравнений в самом начале своих серьёзных занятий.

Эта брошюра основана на лекциях, дважды прочитанных мной в Красноярских краевых летних школах по естественным наукам для школьников, окончивших 10-й класс. Впервые эти лекции были опубликованы в книге «На стыке всех наук. Научно-методические материалы летней школы» (изд-во Красноярского ун-та, 1989, сс. 124—177). Я с большим удовольствием вспоминаю замечательную атмосферу Красноярских школ и чрезвычайно благодарен их

---

*) См. также последующие издания этой книги или книгу Я. Б. Зельдовича и И. М. Яглома «Высшая математика для начинающих физиков и техников» (М., 1982).

**) Цит. по: В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.

организаторам за предоставленную мне возможность там работать. Я весьма благодарен также сотрудникам издательства МЦНМО за их доброжелательность и эффективность.

О РЕШЕНИИ ПРИВЕДЁННЫХ В ТЕКСТЕ ЗАДАЧ

Решение задач необходимо для освоения материала этой брошюры. Но следует иметь в виду, что основные из приведённых здесь задач не являются полностью математическими. Точнее, речь идёт о задачах на составление и решение дифференциальных уравнений, включая доведение задачи до числового ответа, что важно в приложениях.

При решении этих задач желательно соблюдать следующую последовательность действий:

1-й этап — составление дифференциального уравнения с буквенными данными;

2-й этап — решение соответствующего дифференциального уравнения и получение буквенного ответа, анализ этого ответа;

3-й этап — получение численного ответа (подстановка чисел в формулы, полученные на втором этапе).

Первый этап состоит в нахождении математического описания явления на языке дифференциальных уравнений. Этот этап не относится к чистой математике, но он, по всей видимости, является самым важным и наиболее трудным.

На втором этапе применяют математический анализ для решения полученных дифференциальных уравнений. Использование на первых двух этапах числовых данных задачи может оказаться громоздким и вредным для последующего анализа. Если буквенных обозначений всех или некоторых величин в задаче нет, то следует их ввести. Анализ полученного в буквах ответа должен убедить вас в правильности составленного уравнения (нужно анализировать физические следствия полученных формул и их предельные случаи, чтобы понять, соответствует ли ответ здравому смыслу и физической реальности).

На третьем этапе подставляют числа в формулы, не забывая о единицах. Иногда целесообразно подставлять числа прямо с единицами, данными в задаче (указывая единицы явно), и лишь потом преобразовывать единицы (преждевременный перевод в единую систему может оказаться неэкономным, так как некоторые единицы измерения могут сократиться). Точность вычислений должна соответствовать точности данных задачи.

Примеры решений по этой схеме даны в тексте брошюры.

Не считая задач с физическим и естественно-научным содержанием, в брошюре приведено ещё несколько отдельных задач, в которых требуется приближённо вычислить некоторые величины (без микрокалькулятора). В Красноярской летней школе почти не было микрокалькуляторов, а были бумага и авторучки, так что этот способ вычислений был, по существу, вынужденным. Но им стоит владеть даже при наличии компьютеров, поскольку, во-первых, всегда полезно грубо оценить ответ с целью убедиться в правильности вычислений, сделанных с помощью вычислительного устройства, а во-вторых, такие вычисления имеют развивающую роль, позволяя лучше понять разные закономерности, связывающие величины и функции, увидеть без вычислений порядок тех или иных величин, встречающихся в практических задачах. При наличии небольшого опыта вычисления с точностью 10% (а это типичная точность, требуемая в приведённых задачах) могут быть сделаны очень быстро — за пару минут, а при известной тренировке и за несколько секунд.

Ваши усилия будут вознаграждены тем, что после решения каждой из таких задач вы будете лучше понимать окружающий вас мир.

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ КАК МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть какое-то тело (материальная точка) движется вдоль прямой (например, вертикальной). Обозначим через $z(t)$ координату этого тела вдоль данной прямой в момент времени t. Начало координат на прямой можно выбрать произвольно. Средняя скорость движения на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$ равна

$$v_{\text{ср}}(t, t+\Delta t)=\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Здесь Δt — любое ненулевое действительное число. Устремляя Δt к 0 при фиксированном t, получим мгновенную скорость в момент времени t, которая в математике называется *производной* функции z по t и обозначается $z'(t)$ или просто z', если момент t произволен или ясно, о каком t идёт речь. Таким образом, производная

$$z'=z'(t)=\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

представляет собой мгновенную скорость движения в момент времени t (отношение пути, пройденного за бесконечно малый промежуток времени, к величине этого промежутка с учётом знаков). Если $z'(t)<0$, то в момент времени t тело двигалось в сторону уменьшения координаты z.

В дальнейшем при употреблении производной какой-либо функции $z(t)$ подразумевается, что эта производная существует (для функций, встречающихся в физике, это выполняется, как правило, всюду, за исключением, быть может, отдельных значений t). Для конкретных функций существование производных обычно легко устанавливается из правил дифференцирования, но мы не будем специально следить за этим, чтобы не удлинять изложение.

Пример 1. Равномерное движение:

$$z(t)=z_0+vt.$$

Тогда $z'(t)=v$ — постоянная величина.

Пример 2. Равноускоренное движение:

$$z=z_0+v_0t+\frac{at^2}{2},$$

здесь v_0 — начальная скорость, a — ускорение. В этом случае $z'(t)=v_0+at$ по известным правилам дифференцирования. Напомним, что если даны две функции $f(t)$, $g(t)$ и постоянная a, то $(f+g)'=f'+g'$, $(af)'=af'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ (последняя формула верна в случае, когда $g(t)\neq 0$ в рассматриваемой точке t). Из предпоследней формулы следует, что $(t^2)'=2t$.

При любом целом n легко доказать (например, индукцией по n), что $(t^n)'=nt^{n-1}$. Можно доказать, что при $t>0$ эта формула верна и для нецелых n (об этом ещё будет идти речь ниже).

Укажем геометрический смысл производной: если нарисовать график функции $z=z(t)$, то $z'(t)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t (рис. 1).

Правило дифференцирования сложной функции: если даны две функции $F(z)$ и $z(t)$, то для функции $g(t)=F(z(t))$ производную можно найти по формуле

$$g'(t)=(F(z(t)))'=F'(z(t))\,z'(t),$$

вытекающей из того, что

$$g'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F(z(t))}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta F}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=F'(z(t))\,z'(t)$$

(здесь использовалось, что если $\Delta t\to 0$, то и $\Delta z\to 0$).

Правило дифференцирования обратной функции. Пусть функция $z=f(t)$ строго монотонна на отрезке $[t_1, t_2]$ и имеет производную в каждой точке этого отрезка. Строгая монотонность означает, что функция f либо возрастающая (если $t'<t''$, то $f(t')<f(t'')$), либо убывающая (если $t'<t''$, то $f(t')>f(t'')$). Будем для определённости считать функцию f возрастающей. Тогда множество значений функции f на отрезке $[t_1, t_2]$ представляет собой отрезок $[z_1, z_2]$, где $z_1=f(t_1)$, $z_2=f(t_2)$ (рис. 2). При этом каждому значению $z\in[z_1, z_2]$ отвеча-

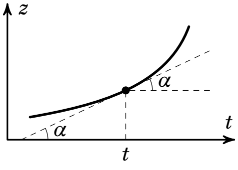


Рис. 1

ет ровно одно значение t, такое, что $z=f(t)$. Обозначим его через $g(z)$. Тогда $t=g(z)$ называется *обратной функцией* к функции f. Из определения ясно, что обратная функция $t=g(z)$ связана с «прямой» функцией $z=f(t)$ соотношениями $f(g(z))=z$, $g(f(t))=t$. Вместо отрезка $[t_1, t_2]$ можно рассматривать интервал (t_1, t_2), полуинтервалы $[t_1, t_2)$, $(t_1, t_2]$, полупрямые $[t_1, +\infty)$, $(-\infty, t_1]$ и т. п.

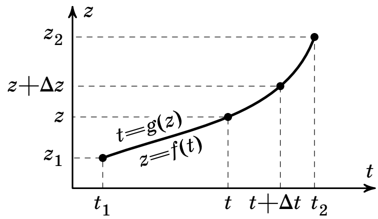


Рис. 2

Дадим приращение Δt аргументу t и проследим за соответствующим приращением Δz функции f, т. е. возьмём $\Delta z=f(t+\Delta t)-f(t)$. Тогда, наоборот, для обратной функции g её приращение, соответствующее приращению Δz её аргумента, равно Δt (см. рис. 2). При $\Delta t\to 0$ будет $\Delta z\to 0$, откуда (если $f'(t)\neq 0$)

$$g'=g'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}}=\frac{1}{f'}=\frac{1}{f'(t)}.$$

Таким образом, мы получили правило дифференцирования обратной функции:

$$g'(z)=\frac{1}{f'(t)},\quad \text{где } z=f(t) \text{ или } t=g(z).$$

Укажем ещё одно доказательство этого правила. Дифференцируя тождество $f(g(z))=z$ по правилу дифференцирования сложной функции, получаем $f'(g(z))\,g'(z)=1$, откуда $g'(z)=\dfrac{1}{f'(g(z))}$, что и требовалось.

Пример. Если $z=f(t)=t^2$, то $t=g(z)=\sqrt{z}$ (считаем, что рассматриваются значения $t\geqslant 0$, на $[0, \infty)$ функция строго монотонна). Имеем:

$$g'(z)=\frac{1}{f'(t)}=\frac{1}{2t}=\frac{1}{2g(z)}=\frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Итак, $(\sqrt{z})'=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$. Эта формула — частный случай более общей формулы $(t^n)'=nt^{n-1}$ (или $(z^n)'=nz^{n-1}$), которая верна при $t>0$ (при $z>0$) для произвольного вещественного значения n.

Для доказательства нужно сначала рассмотреть случай $n=\dfrac{1}{q}$, где $q>0$, q — целое. Тогда формула выводится так же, как в случае $n=1/2$. Из правила $(fg)'=f'g+fg'$ следует, что если формула верна для $n=n_1$ и $n=n_2$, то она верна для $n=n_1+n_2$. Теперь мы получаем искомую формулу для всех $n=\dfrac{p}{q}$, где p, q — целые,

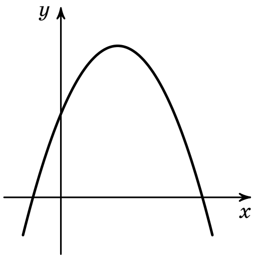


Рис. 3

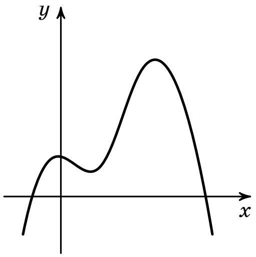


Рис. 4

$p,\ q>0$. По непрерывности она верна при всех $n>0$. При $n=0$ формула очевидна. Если $n<$ <0, то нужно записать $t^n=\frac{1}{t^{-n}}$ и воспользоваться формулой дифференцирования дроби. Например, $\left(\frac{1}{t^2}\right)'=\frac{-2}{t^3}$.

1. Поезд прошёл некоторый путь, причём первую половину он шёл со скоростью 40 км/ч, а вторую со скоростью 60 км/ч. Какова была средняя скорость поезда?

2. По графику квадратного трёхчлена $y=$ $=ax^2+bx+c$ (рис. 3) определить знаки его коэффициентов.

3. По графику функции $y=f(x)$ (рис. 4) нарисовать график её производной $f'(x)$.

4. Написать уравнение прямой, касательной к графику функции $y=3x-x^2$ в точке этого графика с абсциссой $x_0=2$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+6x^2+9x+1$ на отрезке $[-3,\ 1]$.

6. Найти производные функций: а) $y=(x^2+1)^{2003}$; б) $y=\sin x^2$; в) $y=\sqrt{x^2+1}$; г) $y=e^{x^2}$; д) $y=e^{e^x}$; е) $y=\sin\cos x$; ё) $y=\sqrt[10]{x^5+1}$.

7. В равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1 вписать прямоугольник наибольшей площади со стороной, лежащей на гипотенузе этого треугольника. Какова эта наибольшая площадь?

8. Написать формулы, задающие координаты точки, равномерно движущейся по окружности, как функции времени. Найти производные этих функций. Что характеризуют эти производные? Как увидеть из полученных формул, что скорость движения направлена по касательной к окружности?

9. Две среды разделены плоской границей. Луч света, идущий из точки, лежащей по одну сторону границы, в точку, лежащую по другую сторону, избирает путь, требующий наименьшего времени. Что это за путь, если скорость движения в указанных средах равна v_1 и v_2 соответственно?*)

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Показательная функция — это функция $z(t)=a^t$, где $a>0$, a — постоянная величина. Вместо t можно обозначить аргумент

*) Двумя чертами слева отмечены задачи для самостоятельного решения. Более трудные и не обязательные из них отмечены звёздочками (*).

любой другой буквой, например, x. Будем писать a^x, что чаще встречается в учебниках. При $a>1$ функция a^x строго возрастает, а при $a<1$ строго убывает (рис. 5). Найдём производную функции a^x. Имеем:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=ba^x,$$

где $b=(a^x)'|_{x=0}$, т. е. b — значение искомой производной при $x=0$. Оказывается, что если взять $a=e=2{,}718281828459045...$, то получим $b=1$, и производная имеет более простой вид: $(e^x)'=e^x$.

Число e, для которого верна эта формула, находим из условия

$$(e^x)'|_{x=0}=1, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1.$$

Полагая $\Delta x=\frac{1}{n}$, где $n\gg 1$ (т. е. n очень велико), получим $e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x$, причём точность этой приближённой формулы тем больше, чем меньше Δx (или чем больше n). При целом n находим $e=(e^{1/n})^n\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, или, точнее, $e=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ определяется при $a>0$, $a\neq 1$, и её область определения — все положительные x. Эта функция обратна к a^x, т. е. условие $y=a^x$ равносильно условию $x=\log_a y$. Множество значений функции $\log_a y$ — все вещественные числа. Графики функций $y=\log_a x$ показаны на рис. 6. Наиболее проста в обращении логарифмическая функция $\ln x=\log_e x$, т. е. логарифмическая функция с основанием $a=e$.

Найдём производную функции $y=\ln x$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\ln x)'=\frac{1}{(e^y)'}\bigg|_{y=\ln x}=\frac{1}{e^y}\bigg|_{y=\ln x}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

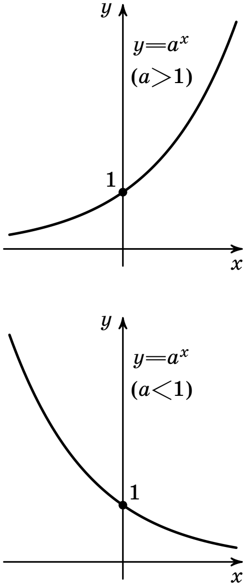


Рис. 5

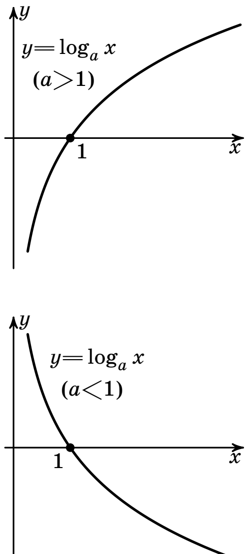


Рис. 6

Найдём производную показательной функции a^x. Имеем: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$, откуда, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

Мы нашли постоянную b, которая ранее не была определена, и оказалось, что $b = \ln a$.

Отметим, что $\log_{10} e \approx 0{,}4343$ и $\ln 10 = \dfrac{1}{\log_{10} e} \approx 2{,}3$, т. е. $(10^x)' \approx 2{,}3 \cdot 10^x$.

Найдём производную функции $y = \log_a x$. По правилу дифференцирования обратной функции,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot a^y}\bigg|_{y=\log_a x} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{\ln a \cdot x}.$$

В частности, $(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x \ln 10} = \log_{10} e \cdot \dfrac{1}{x} \approx 0{,}4343 \cdot \dfrac{1}{x}$. Формулу для $(\log_a x)'$ можно также вывести из соотношения $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, верного при любом $b > 0$, $b \neq 1$ (см. задачу 11).

10. Пользуясь только определением логарифмической функции, вычислить: а) $\log_2 256$; б) $\log_4(2^{2002})$; в) $\log_3(27^{15})$; г) $\log_{27}(3^{99})$; д) $\ln(e^{2003})$; е) $2^{\log_2 5}$; ё) $9^{\log_3 10}$; ж) $e^{\ln 2003}$; з) $a^{\log_a x}$.

11. Доказать формулу $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

12. Доказать, что $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

13. Используя приближённые значения $\ln 10 \approx 2{,}3$, $\log_{10} e \approx 0{,}4343$, $\log_{10} 2 \approx 0{,}30$, найти без микрокалькулятора приближённые значения (с точностью 10%): а) $\ln 100$; б) $\ln 0{,}1$; в) $\log_{10} 40$; г) $\log_{10} 5$; д) $\log_{10} 32$; е) $\ln 2$; ё) $\ln 25$; ж) $\ln 20$; з) $\ln 0{,}5$; и) $\ln 0{,}01$; й)* e^{10}.

14*. Определить без микрокалькулятора что больше: а) $\log_2 3$ или $\log_3 4$; б) $\log_5 7$ или $\log_7 8$?

15*. Придумать способ приближённого вычисления $\log_a x$ для данных x и a с любой наперёд заданной точностью. Вычислить с помощью этого способа $\log_2 3$ с точностью до 0,1.

16*. Вычислить без микрокалькулятора $\log_{10} 2$ с точностью до 0,1.

17*. Вычислить без микрокалькулятора $\log_{10} e$ с точностью до 0,1.

18. Найти производные функций а) $y = \ln x^2$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$; в) $y = \ln \ln x$; г) $y = \log_2 x$; д) $y = 2^x$; е) $y = \log_{10}(x^3+1)$.

19*. Доказать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает с ростом n, а последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает с ростом n. Вывести отсюда, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

20*. Доказать, что $2<e<3$.

§ 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПУТИ ПО СКОРОСТИ. ИНТЕГРАЛ

Предположим, что нам задана скорость движения по прямой во все моменты времени, например, запись показаний спидометра автомобиля, и мы хотим восстановить путь, пройденный в каждый момент времени, точнее, координату движущейся точки в любой момент времени. Это значит, что производная $z'(t)$ известна во все моменты $t\in[t_1, t_2]$ и требуется найти $z(t)$. Обозначим $z'(t)=v(t)$. Функция $z(t)$ называется *неопределённым интегралом* функции $v(t)$, или *первообразной* для функции $v(t)$.

Насколько однозначно определена функция $z(t)$? Ясно, что если заменить $z(t)$ на $z(t)+C$, где C — постоянная, то равенство $v(t)=z'(t)$ не изменится. Смысл этого в том, что можно начать движение с любой точки. Если задать точку начала движения $z(t_1)=$ $=z_0$, то $z(t)$ определяется однозначно. Это можно увидеть ещё таким образом: если $z_1(t)$, $z_2(t)$ — две такие функции, что $z_1'(t)=v(t)$, $z_2'(t)=v(t)$, то, обозначив $z_3(t)=z_1(t)-z_2(t)$, получим $z_3'(t)=0$, т. е. функция $z_3(t)$ задаёт движение с нулевой скоростью, откуда соответствующая точка стоит на месте, т. е. $z_3(t)=C$, $z_1(t)=z_2(t)+C$.

Определённый интеграл. Пусть задана скорость движения $v(t)$ и a, $b\in[t_1, t_2]$, где $[t_1, t_2]$ — отрезок времени, на котором рассматривается движение. Перемещение точки за время от $t=a$ до $t=b$ называется *интегралом* функции $v(t)$ по отрезку $[a, b]$ (или *определённым интегралом*) и обозначается

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

(смысл этого обозначения мы выясним ниже). Если $z(t)$ — первообразная для функции $v(t)$, то ясно, что данное перемещение равно $z(b)-z(a)$, откуда

$$\int_a^b v(t)\,dt=z(b)-z(a)=z(t)\Big|_a^b$$

(последнее выражение является просто удобной сокращённой записью для $z(b)-z(a)$).

Эта формула называется формулой Ньютона—Лейбница. Можно записать наоборот функцию $z(t)$ — через определённый интеграл.

Для этого под знаком интеграла обозначим переменную t другой буквой τ (это не играет роли, так как результат зависит только от b и a, но не от t). Вообще переменная, по которой происходит интегрирование (t в интеграле, написанном выше), называется *переменной интегрирования*, и её можно обозначить любой буквой, от которой не зависят пределы интегрирования a и b. Поэтому формула Ньютона—Лейбница может быть записана в виде

$$\int_a^b v(\tau)\,d\tau = z(b) - z(a).$$

Примем $b=t$ и получим $\int_a^t v(\tau)\,d\tau = z(t) - z(a)$ или

$$z(t) = z(a) + \int_a^t v(\tau)\,d\tau.$$

Эта формула даёт запись первообразной функции в виде *определённого интеграла с переменным верхним индексом*. Из неё следует, что

$$\left(\int_a^t v(\tau)\,d\tau \right)' = z'(t) = v(t),$$

т. е. производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе.

Примеры нахождения первообразных и интегралов. Операция нахождения первообразных (или неопределённых интегралов) обратна нахождению производной. Неопределённый интеграл функции $v(t)$ обычно обозначается $\int v(t)\,dt$. Если $z(t)$ — какая-то первообразная для $v(t)$, то $\int v(t)\,dt = z(t) + C$, где C — произвольная постоянная. Зная таблицу производных, можно найти некоторые первообразные и интегралы. Например:

$$(t^n)' = nt^{n-1} \;\to\; \int t^{n-1}\,dt = \frac{1}{n}t^n + C \text{ (при } n \neq 0),$$

$$\text{или } \int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \text{ (при } n \neq -1),$$

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} \text{ (при } t > 0) \;\to\; \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C \text{ (при } t > 0),$$

$$(e^t)' = e^t \;\to\; \int e^t\,dt = e^t + C,$$

$$(\sin t)' = \cos t \;\to\; \int \cos t\,dt = \sin t + C,$$

$$(\cos t)' = -\sin t \;\to\; \int \sin t\,dt = -\cos t + C.$$

Если $v(t) = v_1(t) \pm v_2(t)$, то первообразная $z(t)$ может быть найдена по формуле $z(t) = z_1(t) \pm z_2(t)$, где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — первообразные для $v_1(t)$, $v_2(t)$.

П р и м е р. Пусть $v(t)=v_0+at$ (равноускоренное движение), тогда

$$z(t)=\int(v_0+at)\,dt=\int v_0\,dt+\int at\,dt=v_0t+\frac{at^2}{2}+C=z_0+v_0t+\frac{at^2}{2},$$

где $z_0=z(0)$ — значение координаты z в момент времени 0.

21. Скорость точки, движущейся по прямой, меняется по закону а) $v(t)=t^3$; б) $v(t)=t^{-2}$; в) $v(t)=t^{-1}$. Какой путь будет пройден при $1\leqslant t\leqslant 2$?

22. Вычислить: а) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt$; б) $\int\limits_2^8 t^4\,dt$; в) $\int\limits_5^{10}\frac{1}{t}dt$; г) $\int\limits_5^7 x^3\,dx$; д) $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,dx$; е) $\int\limits_1^2\sqrt[4]{x}\,dx$; ё) $\int\limits_1^2 e^x\,dx$; ж) $\int\limits_2^4 2^x\,dx$.

23. Вычислить: а) $\int x^5\,dx$; б) $\int\sin 2x\,dx$; в) $\int\sqrt{3x}\,dx$; г) $\int e^{4x}\,dx$.

24. Доказать, что если $f(x)=ax^2+bx+c$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt=\frac{1}{6}\left(f(x_1)+4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f(x_2)\right)(x_2-x_1).$$

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИНТЕГРАЛА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЁМОВ

Нарисуем график скорости $v(t)$ и попробуем понять, как по нему восстановить перемещение $z(t)$. Пусть сначала $v(t)=v_0=\text{const}$. Тогда за время от t_1 до t_2 проходится путь $z(t_2)-z(t_1)=v_0(t_2-t_1)$. Этот путь равен площади под графиком v, лежащей между вертикальными прямыми $t=t_1$ и $t=t_2$ (рис. 7), так как получается прямоугольник с высотой v_0 и основанием t_2-t_1. Оказывается, то же самое верно и в общем случае, т. е. перемещение $z(b)-z(a)=\int\limits_a^b v(t)\,dt$ равно площади под графиком $v(t)$ между вертикальными прямыми $t=a$ и $t=b$ (рис. 8). По этой причине возникло обозначение интеграла через $\int$ (это вытянутая буква S). Для доказательства нужно разбить отрезок $[a, b]$ на маленькие части точками $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{n-1}$: $a<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<b$.

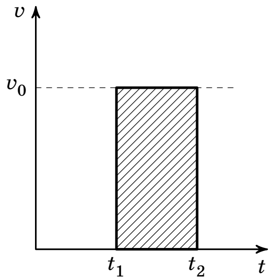


Рис. 7

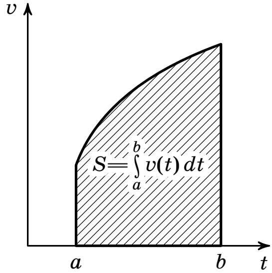


Рис. 8

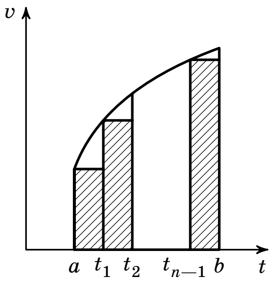


Рис. 9

Примем для удобства $t_0=a$, $t_n=b$. Тогда площадь S, о которой идёт речь, с любой точностью можно заменить на сумму площадей прямоугольников с нижними основаниями $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$ и с высотами $v(t_0)$, $v(t_1)$, ..., $v(t_{n-1})$ (рис. 9), т. е. получаем

$$S \approx v(t_0)(t_1-t_0)+v(t_1)(t_2-t_1)+\ldots+v(t_{n-1})\times$$
$$\times(t_n-t_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1}-t_k)=\sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t_k$$

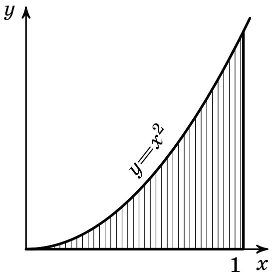


Рис. 10

(это сокращённое обозначение левой части). Более точная запись:

$$S=\lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1}-t_k)=\lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t_k,$$

где $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$. Можно, например, брать разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей, так что $\Delta t_k=\dfrac{b-a}{n}$ и тогда условие перехода к пределу состоит просто в том, что $n\to\infty$. Но, с другой стороны, точно так же можно находить путь, пройденный в промежутке от a до b, так как на маленьких участках $[t_k, t_{k+1}]$ скорость можно считать постоянной. Итак,

$$S=\int_a^b v(t)\,dt=\lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\,\Delta t_k.$$

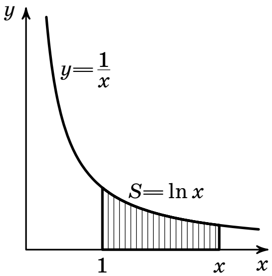


Рис. 11

Отметим соглашение о знаке площади: если кусок площади лежит под осью абсцисс, то его знак считается отрицательным, так как в этом случае $\Delta t_k>0$, а $v(t_k)<0$.

Пример 1. Найдём площадь S под параболой $y=x^2$ от точки $x=0$ до точки $x=1$ (рис. 10). Имеем:

$$S=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Площадь под гиперболой $y=1/x$ от $x=1$ до произвольного x равна $\int_1^x t^{-1}\,dt=\ln t\Big|_1^x=\ln x$ (рис. 11). Таков геометрический смысл натурального логарифма.

Нахождение объёмов. Пусть дано тело в трёхмерном пространстве, и площадь его сечения плоскостью, параллельной координатной плоскости yz и проходящей через точку оси x с координатой x, равна $S(x)$. Тогда объём V этого тела записывается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)\,dx,$$

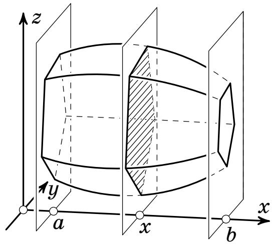


Рис. 12

где a, b выбраны так, что проекция тела на ось x содержится в отрезке $[a, b]$ (рис. 12). Для доказательства нужно разбить всё тело плоскостями $x = x_k$ на тонкие слои (рис. 13). Здесь $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда объём слоя, лежащего над отрезком $[x_k, x_{k+1}]$, равен приблизительно $S(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ (с тем большей точностью, чем меньше $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$), откуда

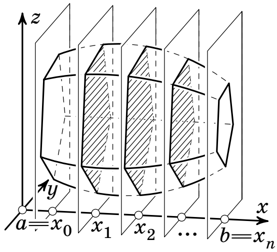


Рис. 13

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Пример 3. Рассмотрим шар радиуса R: поместим его центр в начало координат. Его сечение плоскостью, параллельной оси yz и пересекающей ось x в точке с абсциссой x, есть круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ (рис. 14), откуда $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Поэтому объём шара равен

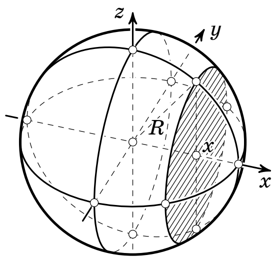


Рис. 14

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi \left(R^2(-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

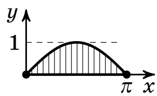


Рис. 15

25. Найти площадь под одной волной синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 15).

26. Можно ли вычислить суммарную площадь двух волн синусоиды (рис. 16) как $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$? Чему равны площадь и этот интеграл?

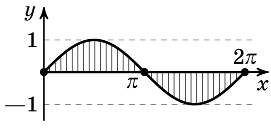


Рис. 16

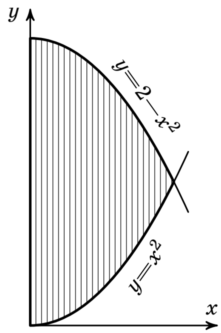


Рис. 17

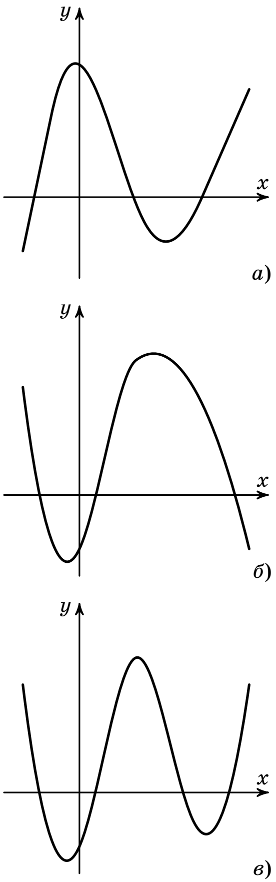


Рис. 18

27. Найти площадь между параболами $y=x^2$ и $y=2-x^2$ и прямой $x=0$ (рис. 17).

28. По графику функции $f(x)$ нарисовать график какой-нибудь её первообразной (рис. 18, *а—в*).

29. Найти объём шарового слоя: куска шара, высекаемого двумя параллельными плоскостями, проходящими по одну сторону от центра.

30. Получить формулы для объёмов пирамиды и конуса, а также усечённой пирамиды и усечённого конуса.

31*. Вывести из задачи 24, что объёмы, указанные в задачах 29, 30, могут быть найдены по формуле Симпсона:

$$V=\frac{H}{6}(S_1+4S_{\text{ср}}+S_2),$$

где H — высота, S_1, S_2 — площади оснований, $S_{\text{ср}}$ — площадь срединного сечения.

32. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, пользуясь представлением интеграла от x^k в виде предела сумм.

§ 5. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $y'=ky$

Основной закон радиоактивного распада состоит в том, что отношение числа распавшихся за любой фиксированный малый промежуток времени атомов к общему числу атомов, имевшихся в начале этого промежутка времени, не зависит от общего числа атомов (если считать это общее число большим). Причина этого состоит в том, что радиоактивный распад означает распад ядер, а ядра не взаимодействуют друг с другом при обычном состоянии вещества, взаимодействуют лишь электронные оболочки. Поэтому вероятность распада данного атома не зависит от того, сколько имеется атомов. Ясно также, что количество атомов, распавшихся за малый промежуток времени Δt, пропорционально Δt.

Обозначим массу нераспавшегося вещества в момент времени t через $y(t)$. За время Δt распадается $y(t)-y(t+\Delta t)$ вещества. Основной закон радиоактивного распада можно записать так:

$$\frac{y(t)-y(t+\Delta t)}{y(t)}\approx k\Delta t,$$

где равенство тем точнее, чем меньше Δt. Здесь коэффициент k постоянен и характеризует данное вещество: он равен вероятности распада индивидуального атома за единицу времени, при условии, что эта единица выбрана достаточно малой (по сравнению, например, с введённым ниже периодом полураспада). Найденное соотношение можно, поделив на $-\Delta t$ и умножив на $y(t)$, переписать в виде

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\approx -ky(t).$$

Поскольку точность этого равенства растёт при $\Delta t\to 0$, переходя к пределу, мы получим точное равенство

$$y'(t)=-ky(t), \tag{1}$$

представляющее собой *дифференциальное уравнение* радиоактивного распада. Можно ещё произвольно задать исходное количество вещества

$$y(0)=y_0, \tag{2}$$

что представляет собой *начальное условие* для уравнения (1).

Если окажется, что уравнение (1) с условием (2) имеет единственное решение, то можно считать, что оно правильно описывает рассматриваемый процесс.

Решим уравнение (1) с начальным условием $y(0)=y_0>0$. На некотором интервале $[0, t_0]$ будет $y(t)>0$. Разделив уравнение (1) на $y(t)$, получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-k.$$

В силу правила дифференцирования сложной функции и формулы $(\ln x)'=1/x$ можно переписать это уравнение в виде $(\ln y(t))'=-(kt)'$. Поскольку две первообразные одной функции отличаются на постоянную, получаем $\ln y(t)=-kt+C_1$, или $y(t)=e^{-kt+C_1}=e^{C_1}e^{-kt}=Ce^{-kt}$, где $C>0$. Отсюда видно, что эта формула применима при всех t, так как наше рассуждение проходит всегда, пока $y(t)>0$. Подставляя $t=0$, находим $C=y_0$ и окончательно

$$y(t)=y_0e^{-kt}. \tag{3}$$

Таким образом, единственное решение уравнения (1) с начальным условием (2) имеет вид (3), если $y_0>0$. Если $y_0<0$, то можно вместо $y(t)$ рассмотреть функцию $-y(t)$, которая удовлетворяет тому же уравнению с начальным условием $(-y_0)$. Отсюда вновь получается формула (3).

Остаётся рассмотреть случай $y_0=0$. В физической задаче в этом случае $y(t)\equiv 0$ (если не было никакого вещества, то ничего и не останется). Однако математическая задача о решении уравнения (1) с начальным условием (2), где $y_0=0$, в принципе могла бы иметь решение $y(t)\not\equiv 0$. Можно доказать, что такого решения нет. Приведём такое доказательство, а в дальнейшем будем опускать математические подробности, если в данной физической задаче всё ясно.

Запишем $y(t)$ в виде $y(t)=z(t)e^{-kt}$. Видимо, должно оказаться тогда, что $z(t)=\mathrm{const}$. Запись такого вида означает, что мы просто ввели новую неизвестную функцию $z(t)=y(t)e^{kt}$. Подставим $y=$ $=ze^{-kt}$ в уравнение (1). Тогда получим, пользуясь формулой дифференцирования произведения, $z'e^{-kt}+(-k)ze^{-kt}=-kze^{-kt}$. Отсюда $z'e^{-kt}=0$ и $z'=0$, т. е. $z=C=\mathrm{const}$, а это означает, что $y(t)=$ $=Ce^{-kt}$. В частности, если $y(0)=y_0=0$, то $y(t)\equiv 0$. Заодно мы доказали и единственность решения уравнения (1) с начальным условием (2), хотя при $y_0\neq 0$ это было ясно и раньше. Выясним смысл коэффициента k, теперь уже исходя из полученных формул. Для этого введём период полураспада T, характеризующий радиоактивный распад вещества и равный времени, за которое распадается половина вещества, имевшегося вначале. Получим $y_0e^{-kT}=\dfrac{y_0}{2}$, или $e^{kT}=2$, откуда $T=\dfrac{\ln 2}{k}$, или $k=\dfrac{\ln 2}{T}$. Формула для решения приобретает вид

$$y=y_0e^{-kt}=y_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}=y_0e^{\ln 2\left(-\frac{t}{T}\right)}=y_0(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}}=y_02^{-\frac{t}{T}}.$$

Итак, $y(t)=y_02^{-t/T}$, где T — период полураспада.

Заметим, что $\ln 2$ легко находится, если принять во внимание, что $\log_{10} 2\approx 0{,}3010$, $\log_{10} e\approx 0{,}4343$, откуда $\ln 2=\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}\approx 0{,}69$.

Укажем наиболее важные периоды полураспада: $T_{\mathrm{U}}=4{,}5\times$ $\times 10^9$ лет — это величина периода полураспада наиболее распространённого изотопа урана $^{238}\mathrm{U}$; $T_{\mathrm{Ra}}=1600$ лет. Для радиоактивного изотопа углерода $^{14}\mathrm{C}$ период полураспада $T_{^{14}\mathrm{C}}=5700$ лет. Этот изотоп используется для определения возраста ископаемых организмов так называемым радиоуглеродным методом, основанным на том, что изотоп $^{14}\mathrm{C}$ попадает в организм лишь во время его жизни, а после смерти организма просто распадается в соответствии с законом радиоактивного распада. Сравнивая количество изотопов $^{14}\mathrm{C}$ в живом организме с его количеством в изучаемом ископаемом образце, можно определить возраст ископаемого образца.

33. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

34. В течение года из каждого грамма радиоактивного вещества распадается 0,44 мг (1 мг$=10^{-3}$ г$=10^{-6}$ кг). Через сколько лет распадётся половина имеющегося количества?

35. В куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

36*. В костях живого человека один из $5 \cdot 10^{11}$ атомов углерода является изотопом ^{14}C (период полураспада 5700 лет), остальные атомы углерода — устойчивые изотопы ^{12}C. При исследовании образца массой 1 г одной из человеческих костей, найденных на стоянке первобытного человека, за 10 мин зарегистрировано 100 распадов атомов ^{14}C. Считая, что изучаемый образец состоит только из углерода (этого можно добиться специальной обработкой), оценить возраст образца (напомним, что в 12 г углерода содержится $6 \cdot 10^{23}$ атомов).

§ 6. ВЫТЕКАНИЕ ВОДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $y'=f(y)$

Экспериментальный факт состоит в том, что скорость вытекания воды через небольшое отверстие равна $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g=9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения, h — высота уровня воды над отверстием (рис. 19). Заметим, что $v=v(h)$ является функцией от h, значит, по мере вытекания воды скорость вытекания уменьшается. Если попытаться вывести формулу для v из закона сохранения энергии, то получим $v=\sqrt{2gh}$. Коэффициент 0,6 связан с наличием вязкости.

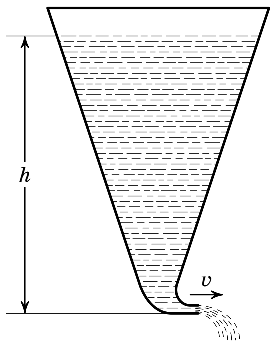


Рис. 19

Составим дифференциальное уравнение вытекания воды. Пусть $S(h)$ — площадь сечения сосуда на высоте h над отверстием, а высота $h=h(t)$ есть функция времени, описывающая вытекание. За время от t до $t+\Delta t$ высота изменится на величину $\Delta h=h(t+\Delta t)-h(t)$ (которая отрицательна!), а объём ΔV вытекшей жидкости будет

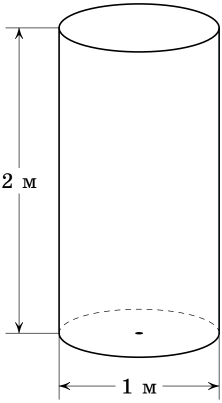


Рис. 20

примерно равен $-S(h)\,\Delta h$. С другой стороны, если s — площадь сечения отверстия, через которое вытекает вода, то ясно, что $\Delta V \approx v(h)\,s\,\Delta t$, так как за время Δt вытекает вода того же объёма, что и цилиндр сечения s и высоты $v\,\Delta t$. Точность обеих формул для ΔV возрастает с уменьшением Δt. Приравнивая найденные выражения для ΔV, получим $-S(h)\,\Delta h \approx v(h)\,s\,\Delta t$. Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, мы приходим к формуле

$$-S(h)\,h' = sv(h) \quad \text{или} \quad h' = -\frac{s}{S(h)}v(h).$$

Решим, например, такую конкретную задачу: за какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см (рис. 20)? Здесь $S(h) = \pi\cdot(0{,}5)^2 = \text{const}$ (в качестве единицы возьмём метр) или (пока без чисел) $S(h) = \pi R^2$, R — радиус основания бака, $R = 0{,}5$ м; $s = \pi r^2$ — площадь отверстия, r — радиус отверстия, $r = 0{,}005$ м, $\Delta V = \pi R^2 \Delta h \approx -\pi r^2 \cdot 0{,}6\sqrt{2gh}\Delta t$, откуда получаем $h' = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh}$. Решение этого уравнения аналогично решению уравнения радиоактивного распада. Поделим обе части на $\sqrt{2gh}$. Получим $\frac{h'(t)}{\sqrt{2gh(t)}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}$, или, по формуле дифференцирования сложной функции, $\left(\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\right)' = \left(-0{,}6\frac{r^2}{R^2}t\right)'$, откуда

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}t + C.$$

Теперь определим C. Для этого воспользуемся начальным условием $h(0) = H$, где $H = 2$ м — высота бака. Отсюда $C = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$. В итоге получим

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6\frac{r^2}{R^2}t + \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}.$$

Момент вытекания всей воды характеризуется тем, что $h = 0$, откуда время T вытекания всей воды можно найти из уравнения $0{,}6\frac{r^2}{R^2}T = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$, или $T = \frac{2\sqrt{H}R^2}{0{,}6r^2\sqrt{2g}} = \frac{2\sqrt{2}(0{,}5)^2}{0{,}6\cdot(0{,}5\cdot 10^{-2})^2\sqrt{2\cdot 9{,}8}} \approx 10^4$ с ≈ 3 ч. Вычисления проведены с одной значащей цифрой, так как именно с такой точностью даны все данные задачи. При решении с такой точностью легко обойтись без всяких вычислительных средств и целесообразно научиться делать это, чтобы в более сложных случаях уметь делать грубую прикидку ответа.

Выше решено дифференциальное уравнение $h'=a\sqrt{h}$, где a — постоянная. Более общее уравнение $y'=f(y)$ решается аналогично: его решение выражается через интегралы там, где $f(y)\neq 0$. А именно, запишем его в виде $\frac{y'}{f(y)}=1$. Если $G(y)$ — первообразная функции $\frac{1}{f(y)}$, т. е. $(G(y))'=\frac{1}{f(y)}$, или $G(y)=\int \frac{dy}{f(y)}$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем $(G(y(t)))'=(t)'$, откуда $G(y(t))=t+C$. Из уравнения $G(y)=t+C$ можно найти y как функцию от t.

37. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

38. Воронка имеет форму конуса, обращённого вершиной вниз, с радиусом основания $R=6$ см и высотой $H=10$ см. За какое время вытечет из воронки вся вода через круглое отверстие диаметром 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

39. Две одинаковые конические воронки высотой 1 м и радиусом основания 1 м наполнены водой и расположены одна вершиной вверх, а другая — вершиной вниз (рис. 21). В дне каждой из них сделано отверстие диаметром 1 см. Из какой воронки быстрее вытечет вода? Во сколько раз? Найти время вытекания воды из каждой воронки.

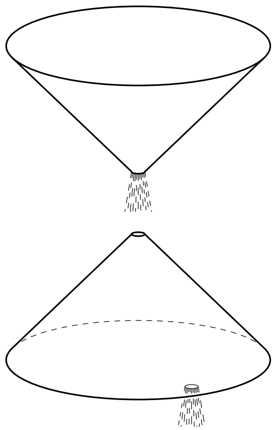


Рис. 21

40. Найти время вытекания воды из чаши, имеющей форму полусферы радиусом 1 м, через отверстие в дне диаметром 1 см (рис. 22).

41. Чаша имеет форму параболоида: поверхности вращения куска параболы $y=ax^2$, $0\leqslant x\leqslant b$. Найти время вытекания воды из этой чаши через отверстие в дне диаметром d. Вычислить это время при $a=1$ м$^{-1}$, $b=1$ м, $d=1$ см.

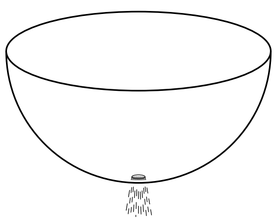


Рис. 22

42. Чай охладился за 10 мин от 100 °C до 60 °C. За какое время он остынет до 25 °C, если температура воздуха в комнате 20 °C? (Скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.)

43. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через час?

44. Сосуд объёмом 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, а вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

45*. В химической реакции атомы или молекулы вещества A объединяются в молекулы A_2: $A+A \to A_2$ (так может обстоять дело, например, с атомарным водородом или кислородом, а также при образовании димеров). При этом скорость реакции пропорциональна количеству сталкивающихся пар, т. е. квадрату имеющейся в рассматриваемый момент массы данного вещества. В некотором сосуде через 5 мин после начала реакции осталась лишь половина непрореагировавшего вещества A. Через какое время останется 1% от исходного количества вещества?

§ 7. АТМОСФЕРНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Найдём зависимость давления воздуха от высоты h над уровнем моря. При этом будем пренебрегать изменением температуры воздуха в зависимости от высоты и эффектами, связанными с горизонтальным движением воздуха (т. е. ветром). Напомним, что на поверхности Земли (на уровне моря) давление равно $p_0 = 10^5$ Па$=10^5$ Н/м$^2=10$ Н/см$^2=1$ атм (т. е. 1 атмосфера), а плотность воздуха (на уровне моря) равна $\rho_0=0{,}0012$ г/см^3. Нам понадобится связь давления и плотности воздуха при фиксированной температуре (которую будем считать равной 0 °C). Эта связь задаётся универсальным газовым законом $pV=\frac{m}{M}RT$, где p — давление газа, V — занимаемый им объём, m — масса газа, M — его молярная масса, T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. При $T=\mathrm{const}$ получаем $pV=Cm$, или $p=c\frac{m}{V}$, или $p=C\rho$, где $\rho=\frac{m}{V}$ — плотность газа. Отметим, что соотношение $p=C\rho$ верно с одной и той же постоянной C для любых объёмов газа (в нашем случае воздуха), находящегося при данной температуре. Постоянную C можно найти, взяв воздух на уровне моря, где $p=p_0$, $\rho=\rho_0$, откуда $C=\frac{p_0}{\rho_0}$, и окончательно связь p и ρ задаётся формулой $p=p_0\frac{\rho}{\rho_0}$ или $\rho=\rho_0\frac{p}{p_0}$.

Теперь найдём давление как функцию высоты, т. е. функцию $p=p(h)$. Рассмотрим как меняется давление при переходе от высоты h к высоте $h+\Delta h$. Для этого рассмотрим вертикальный столбик воздуха сечением S и затем выделим из него часть между высотами h и $h+\Delta h$ (рис. 23). Для этой части напишем условия равновесия: сумма всех внешних сил равна нулю. Внешние силы направлены по вертикали и представляют собой: давление сверху P_1, давление снизу P_2 и вес mg. Все силы будем считать с учётом знаков (положительное направление — направление роста h, т. е. вверх).

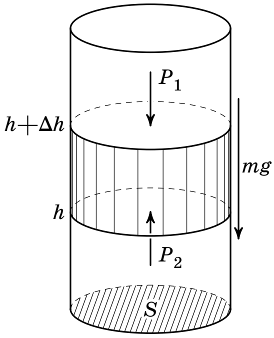


Рис. 23

С учётом этого получим $P_2=p(h)S$, $P_1=-p(h+\Delta h)S$, а вес $P=-mg$. Заметим, что объём столбика между h и $h+\Delta h$ равен $S\Delta h$. Следовательно, его масса равна $m\approx\rho(h)\,S\,\Delta h$ (это приближённая формула, так как $\rho(h)$ меняется на отрезке от h до $h+\Delta h$, но её точность растёт с уменьшением Δh). В итоге условие равновесия приобретает вид $Sp(h)-Sp(h+\Delta h)\approx\rho(h)gS\Delta h$. Деля на $S\Delta h$ и переходя к пределу при $\Delta h\to 0$, получаем $-p'=\rho g$, или $p'(h)=-\rho(h)g$.

Это уже точное равенство. Выразим ρ через p по формуле, приведённой выше: $\rho(h)=\rho_0 p(h)/p_0$. Тогда получим для $p(h)$ дифференциальное уравнение

$$p'(h)=-\frac{\rho_0 g}{p_0}p(h)$$

или $p'(h)=-kp(h)$, где $k=\rho_0 g/p_0$. Но это уравнение уже встречалось нам в теории радиоактивного распада, и его решение нам хорошо знакомо:

$$p(h)=p_0e^{-kh}=p_0e^{-\rho_0 gh/p_0}.$$

Вычислим коэффициент k и найдём значения p на разных высотах. Имеем:

$$k=\frac{\rho_0 g}{p_0}=\frac{1{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{г/см}^3\cdot 10\ \text{м/с}^2}{10\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot\text{см}^2}=\frac{1{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{г/см}}{10^3\ \text{г}}=$$
$$=1{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{см}^{-1}=1{,}2\cdot 10^{-6}\cdot 10^5\text{км}^{-1}=0{,}12\ \text{км}^{-1}.$$

Итак, $p(h)=p_0e^{-0{,}12h}$, где h — высота в километрах.

Приведём таблицу значений $p(h)$ на разных высотах, полученных по этой формуле. Вычисление можно делать так: $e^{-0{,}12\cdot 5}=e^{-0{,}6}\approx 3^{-0{,}5}=(\sqrt{3})^{-1}\approx 0{,}6$ и т. д.

Таблица

h, км	$p(h)$, атм
5	0,6
8,9 (Эверест)	0,3
20	0,1

Заметим, что на высоте 20 км, где летают реактивные самолёты, воздуха в 10 раз меньше, чем на поверхности Земли.

Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными непосредственным измерением давления (с помощью барометра). Поэтому все сделанные предположения оказываются оправданными.

46. Планета «Адиабата» имеет точно такие же форму, размеры и массу, как Земля, но её атмосфера состоит из газа, давление и плотность которого связаны по адиабатическому закону $p=C\rho^{4/3}$, причём на поверхности планеты $p=p_0=10$ Н/см$^2=1$ атм и $\rho=\rho_0=0{,}0012$ г/см^3 (т. е. как на Земле). Найти высоту атмосферы этой планеты.

§ 8. ЗАДАЧА О ТРЕНИИ НАМОТАННОГО КАНАТА

Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Один конец каната прикреплён к судну, а другой тянет рабочий на пристани. Известны коэффициент трения каната о столб k (например, характерное значение $k=1/3$), число витков каната вокруг столба (например, 3 витка). Пусть рабочий тянет с силой 100 Н. Какая сила тормозит судно?

Рассмотрим силы, действующие на кусок каната, лежащий от направления, составляющего угол φ с некоторым начальным направлением отсчёта углов, до направления, составляющего угол $\varphi+\Delta\varphi$ с этим же начальным направлением. Это силы натяжения каната $T(\varphi)$ и $T(\varphi+\Delta\varphi)$, действующие по касательным (рис. 24), реакция столба N, направленная по нормали к канату (считаем $\Delta\varphi$ малым!), и сила трения $F_{\text{тр}}$, тоже направленная по касательной и по величине равная $F_{\text{тр}}=kN$. Векторная сумма этих сил должна быть равна 0. Перенося точку приложения всех сил в точку каната, соответствующую углу φ, получим картинку (рис. 25), из которой, приравнивая к 0 сумму касательных и нормальных составляющих всех сил, находим, что

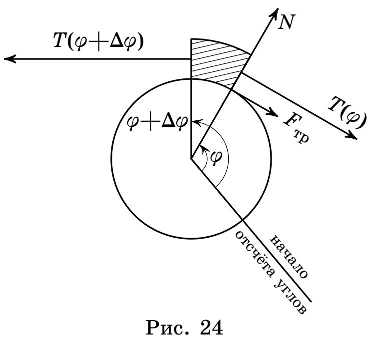


Рис. 24

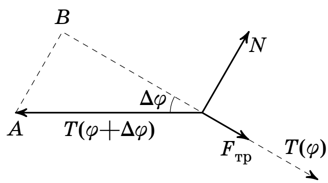


Рис. 25

$$0=N+\overrightarrow{BA}=N-T(\varphi+\Delta\varphi)\sin\Delta\varphi\approx$$
$$\approx N-T(\varphi)\,\Delta\varphi,$$

$$0=T(\varphi+\Delta\varphi)\cos\Delta\varphi-T(\varphi)-F_{\text{тр}}\approx$$
$$\approx T(\varphi+\Delta\varphi)-T(\varphi)-F_{\text{тр}}$$

(мы воспользовались тем, что если x мало́, то $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx \approx 1$, поскольку $(\sin x)'|_{x=0} = 1$, $(\cos x)'|_{x=0} = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\Big)$. В итоге получим $T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) \approx F_{\text{тр}} = kN \approx \approx k\,T(\varphi)\,\Delta\varphi$, откуда, деля обе части на $\Delta\varphi$ и переходя к пределу при $\Delta\varphi \to 0$, получаем

$$T'(\varphi) = kT(\varphi) \quad \text{и} \quad T(\varphi) = T_0 e^{k\varphi},$$

где T_0 — сила на уровне $\varphi = 0$. Можно, например, взять в качестве $\varphi = 0$ то место, где канат сматывается в сторону рабочего, так что $T_0 = 100$ Н. Если канат делает 3 оборота, то сила, действующая на судно, получается при $\varphi = 6\pi$, т. е. в этом случае

$$T(\varphi) = T(6\pi) = T_0 e^{2\pi} = 100 e^{2\pi} \approx 50\,000 \text{ Н}.$$

Итак, если рабочий тянет канат с силой 100 Н, приблизительно равной весу груза с массой 10 кг, то судно тормозит сила величиной $5 \cdot 10^4$ Н, примерно равная весу груза массой 5000 кг $= 5$ т. Эту силу можно, разумеется, сделать сколь угодно большой, увеличивая число оборотов каната вокруг столба.

§ 9. УСКОРЕНИЕ КАК ПРОИЗВОДНАЯ ОТ СКОРОСТИ. ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ В ВОЗДУХЕ С УЧЁТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Основная причина полезности анализа в механике состоит в том, что скорость — это производная от пройденного пути, а ускорение — производная от скорости. Первое мы уже использовали. Поясним второе. Если точка движется вдоль прямой и её скорость в момент времени t равна $v(t)$, то ускорение в этот же момент равно

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

так как ускорение равно скорости изменения $v(t)$. Второй закон Ньютона записывается для материальной точки, движущейся по прямой, в виде

$$ma(t) = F \quad \text{или} \quad mv'(t) = F,$$

где F — сила, которая действует на эту материальную точку. Проще всего иметь дело с силами, зависящими только от скорости. А именно, если $F = f(v)$, то получим уравнение

$$mv'(t) = f(v(t)), \quad \text{или} \quad v'(t) = \frac{1}{m} f(v(t)),$$

оно решается так, как было объяснено в конце § 6. Приведём пример задачи, которая может быть решена таким образом. Пусть требуется описать падение тела в воздухе при условии, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости (опыт показывает, что это довольно точно соответствует действительности). Тогда действующая на падающее тело сила $F=mg-F_{\text{сопр}}$, или $F=mg-av^2$, где a — коэффициент пропорциональности (положительным считаем здесь направление вниз). В итоге $mv'=mg-av^2$ или $v'=g-kv^2$, где $k=a/m$. Решим это уравнение. Заметим, что в начале движения $v=0$ и $g-kv^2>0$. Соотношение $g-kv^2>0$ останется верным в течение всего времени движения, как мы увидим ниже, а пока будем решать уравнение там, где $g-kv^2>0$. Деля обе части уравнения на $g-kv^2$, получаем $\frac{v'}{g-kv^2}=1$. Пусть $F(v)$ — первообразная функции $\frac{1}{g-kv^2}$, т. е. $F'(v)=\frac{1}{g-kv^2}$. Тогда, по формуле дифференцирования сложной функции, получаем $(F(v(t)))'=(t)'$ или $F(v(t))=t+C$. Найдём $F(v)$: $F(v)=\int\frac{1}{g-kv^2}dv$. Для этого напишем $\frac{1}{g-kv^2}=\frac{1}{(\sqrt{g})^2-(\sqrt{k}v)^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}+\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right)$. Легко проверяется, что

$$\int\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}dv=\frac{1}{\sqrt{k}}\ln(\sqrt{g}+\sqrt{k}v),\quad \int\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}dv=-\frac{1}{\sqrt{k}}\ln(\sqrt{g}-\sqrt{k}v).$$

Отсюда

$$\int\frac{1}{g-kv^2}dv=\frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(\ln(\sqrt{g}+\sqrt{k}v)-\ln(\sqrt{g}-\sqrt{k}v)\right)=\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}$$

(постоянную C для краткости не пишем). Итак, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}=t+C.$$

При $t=0$ должно быть $v=0$, так как падение происходит без начальной скорости. Подставляя $t=0$ и $v=0$ в формулу, получаем $0=0+C$, т. е. $C=0$. Итак,

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}=t.$$

Отсюда легко найти v:

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{gk}t}-1}{e^{2\sqrt{gk}t}+1}.$$

Введём функцию

$$\operatorname{th} z=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},$$

которая называется *гиперболическим тангенсом* (другие важные гиперболические функции — *гиперболический косинус* $\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ и *гиперболический синус* $\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$). Если принять это обозначение, то получаем

$$v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{th}(\sqrt{gk}\,t).$$

Заметим, что $\operatorname{th} z=\frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}}$ $\left(\text{в формуле } \operatorname{th} z=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\right.$ поделили числитель и знаменатель на e^{2z}). Поэтому $\lim\limits_{z\to+\infty}\operatorname{th} z=1$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}$. Таким образом, скорость $v(t)$ не растёт неограниченно, но имеет при $t\to+\infty$ предел $v_{\text{пр}}=\sqrt{\frac{g}{k}}$. Выразим k через g и $v_{\text{пр}}$. Получим: $k=\frac{g}{v_{\text{пр}}^2}$ и дальше $\sqrt{gk}=\frac{g}{v_{\text{пр}}}$, откуда формула для $v(t)$ приобретает вид

$$v(t)=v_{\text{пр}}\operatorname{th}\frac{gt}{v_{\text{пр}}}.$$

Интересно ответить на следующие вопросы:

1. Что происходит при малых t, т. е. когда скорость невелика и сопротивление воздуха влияет мало?

2. За какое время скорость практически достигает предельной, например, становится больше 90% предельной?

Начнём с первого вопроса. Выясним, как ведёт себя $\operatorname{th} z$ при малых z. Видно, что $\operatorname{th} z\approx z$ при малых z, поскольку $e^{2z}\approx 1+2z$ при малых z (иначе: $\operatorname{th} 0=0$, а $(\operatorname{th} z)'|_{z=0}=1$). Отсюда $\operatorname{th} z=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\approx\frac{2z}{2z+2}\approx z$ при малых z. Поэтому при малых t получаем

$$v(t)\approx v_{\text{пр}}\frac{gt}{v_{\text{пр}}}=gt,$$

т. е. обычную формулу свободного падения (с нулевой начальной скоростью).

Ответим на второй вопрос. Условие $\operatorname{th} z=0{,}9$ в силу формулы $\operatorname{th} z=\frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}}$ означает, что $e^{-2z}\approx 0{,}05$, т. е. $2z=\ln 20\approx 3{,}0$, или

$z\approx 1{,}5$. Во всяком случае $\operatorname{th} z > 0{,}9$ при $z = 1{,}6$. Поэтому условие $\dfrac{v}{v_{\text{пр}}} > 0{,}9$ заведомо выполняется при $\dfrac{gt}{v_{\text{пр}}} > 1{,}6$, т. е. при $t > \dfrac{1{,}6 v_{\text{пр}}}{g}$. Это ответ на второй вопрос.

Интересно также понять, когда (при малых t) ещё можно пренебречь сопротивлением воздуха? Для этого надо уметь оценивать разность $e^z - (1+z)$ при малых z. Можно доказать, что $e^z - (1+z) \approx \approx \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{6}$. Отсюда получается, что $\operatorname{th} z - z \approx -z^3/3$. Если мы хотим иметь относительную погрешность меньше 0,1, то надо взять $|\operatorname{th} z - z|/z = z^2/3 < 0{,}1$, т. е. $z < 0{,}5$ заведомо достаточно. В нашей задаче это означает, что $\dfrac{gt}{v_{\text{пр}}} < 0{,}5$, т. е. $t < 0{,}5\dfrac{v_{\text{пр}}}{g}$.

Экспериментально известно, что при падении человека (без парашюта) $v_{\text{пр}} = 50$ м/с. Здесь формула $v = gt$ хороша при $t < 2{,}5$ с, а предельная скорость почти набирается за 8 с.

47. Лодка замедляет движение под действием сопротивления воды, пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость её становится равна 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдёт лодка до остановки?

48. Мотор лодки создаёт постоянную силу тяги, а сила трения о воду пропорциональна скорости. а) Доказать, что скорость лодки не может превысить некоторой предельной скорости $v_{\text{пр}}$. б) Найти скорость лодки через 5 с после начала движения, если $v_{\text{пр}} = 30$ км/ч, а скорость её после 2 с была равна 5 км/ч. в) Найти путь, пройденный лодкой за 5 с. г) Когда скорость лодки достигнет 90% от предельной?

49. При падении тела в жидкости для небольших скоростей сила сопротивления пропорциональна скорости. а) Считая этот закон выполненным, доказать существование предельной скорости падения. б) Считая предельную скорость равной 5 м/с, выяснить, через какое время скорость тела станет равной 4,5 м/с. в) Найти путь, проходимый падающим телом за первые 4 с падения.

50. а) Нарисовать графики функций $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$. б) Доказать, что $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. в) Доказать, что $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. д) Доказать теоремы сложения:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

51*. Футбольный мяч массой 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,005 Н при скорости 1 м/с. Вычислить время подъёма мяча и наибольшую высоту подъёма. Как изменятся результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

52*. Футбольный мяч массой 0,4 кг падает с высоты 20 м (без начальной скорости). Сопротивление воздуха пропорционально квадрату его скорости и равно 0,005 Н при скорости 1 м/с. Найти время падения и скорость мяча в конце падения. Как изменятся результаты, если не учитывать сопротивление воздуха?

§ 10. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

Рассмотрим движение ракеты в космосе (рис. 26). Сначала пренебрежём всеми внешними силами, действующими на ракету. Основными параметрами, характеризующими ракету и её двигатель, являются: u_0 — скорость истечения газов из сопла ракеты относительно корпуса ракеты, для простоты считаем её постоянной, она зависит от вида применяемого топлива и составляет 2 км/с для пороха и около 4 км/с для жидкого топлива; M_0 — исходная масса ракеты с горючим; $M_к$ — конечная масса ракеты после выгорания всего горючего.

Напишем уравнение движения ракеты, считая, что она движется по прямой линии. Пусть $z(t)$ — координата ракеты (вдоль этой прямой) в момент времени t; $v(t)=z'(t)$ — скорость ракеты в момент времени t; $m(t)$ — масса ракеты в момент времени t (эта масса уменьшается по мере сгорания горючего).

Воспользуемся законом сохранения импульса (количества движения). При этом удобно ввести мгновенную систему координат, связанную с летящей ракетой (точнее, равномерно движущуюся с той скоростью, с которой ракета движется в момент времени t). В этой системе координат скорость ракеты (и имеющегося в ней топлива) в момент времени t равна нулю. Рассмотрим момент времени $t+\Delta t$ в этой же системе координат. Предположим, что за это время в ракете сгорело и вылетело из неё топливо массой $-\Delta m=m(t)-m(t+\Delta t)$. Скорость самой ракеты (с остатками топлива увеличилась на $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$ и в рассматриваемой системе координат стала равной Δv, в то время

Рис. 26

как скорость вылетевшего топлива равна $-u_0$ (с учётом направления). Суммарный импульс в момент $t+\Delta t$ примерно равен $-\Delta m(-u_0)+m\Delta v$ с точностью, растущей с уменьшением Δt (здесь неточность связана с тем, что со временем меняется масса $m=m(t)$ и, кроме того, скорость вылета горючего в рассматриваемой системе координат будет равна u_0 лишь в момент времени t, так как дальше сама ракета начнёт двигаться). Приравнивая суммарный импульс к нулю, получим $0\approx-\Delta m(-u_0)+m\Delta v$.

Деля обе части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим точное равенство $0=m'(t)\,u_0+m(t)\,v'(t)$, откуда $v'(t)=-u_0\dfrac{m'(t)}{m(t)}$, или $v'(t)=(-u_0 \ln m(t))'$. Отсюда

$$v(t)=-u_0 \ln m(t)+C.$$

Для нахождения C положим $t=0$ и будем считать, что $v(0)=0$, т. е. ракета движется без начальной скорости. Тогда получим $m(0)=M_0$, и уравнение при $t=0$ примет вид $0=-u_0 \ln M_0+C$, т. е. $C=u_0 \ln M_0$. Поэтому формула для v приобретает вид

$$v(t)=-u_0 \ln m(t)+u_0 \ln M_0=u_0 \ln \frac{M_0}{m(t)}.$$

В момент, когда всё топливо израсходовано, получим $m(t)=M_к$,

$$v=u_0 \ln \frac{M_0}{M_к}.$$

Эта формула называется *формулой Циолковского*. Основной вывод из этой формулы: ракета может достичь скорости, большей, чем скорость истечения газов из сопла, хотя для этого отношение массы M_0 ракеты с топливом к массе ракеты без топлива $M_к$ должно быть очень велико. Для увеличения отношения $M_0/M_к$ на разных этапах полёта ракеты делают многоступенчатыми.

Проанализируем, какая сила тяги действует на летящую ракету вследствие выхлопа газов из сопла. Из формулы, полученной выше, находим

$$mv'(t)=-u_0 m'(t).$$

Положим $\mu=\mu(t)=-m'(t)$, так что μ — расход топлива. Из формулы видно, что если положить $u_0\mu=F_т$, то уравнение примет вид второго закона Ньютона:

$$mv'(t)=F_т,$$

поэтому $F_т$ можно считать силой тяги двигателя, ибо она создаёт ускорение ракеты так, как если бы она была внешней силой.

Опишем теперь движение ракеты с учётом других действующих на неё сил. Рассмотрим, например, ракету, стартующую вертикально с поверхности Земли. В этом случае следует учесть силу тяжести. Уравнение приобретает вид

$$mv'(t)=F_{\text{т}}-mg=-u_0m'(t)-mg=u_0\mu-mg$$

(положительным считается направление вверх). Чтобы ракета оторвалась от Земли, необходимо выполнение условия

$$u_0\mu_0-M_0g>0,$$

где $\mu_0=\mu(0)$ — расход топлива в начальный момент времени. Это, в частности, ограничивает массу: $M_0<\frac{u_0\mu_0}{g}$. Далее, деля уравнение на $m(t)$, получим

$$v'=-u_0\frac{m'}{m}-g,$$

или $(v(t))'=(-u_0 \ln m)'+(-gt)'=(-u_0 \ln m-gt)'$, откуда

$$v(t)=-u_0 \ln m(t)-gt+C.$$

При $t=0$ имеем $v=0$ и $m=M_0$, откуда $C=u_0 \ln M_0$, и в итоге

$$v(t)=u_0 \ln \frac{M_0}{m(t)}-gt.$$

Если полёт продолжался в течение времени T и масса ракеты в конце полёта оказалась равной $M_{\text{к}}$, то получим следующую скорость в конце полёта:

$$v=u_0 \ln \frac{M_0}{M_{\text{к}}}-gT.$$

Здесь мы не учитывали изменения силы тяжести в зависимости от высоты. При расчёте космических полётов это приходится учитывать наряду с сопротивлением воздуха и многоступенчатостью ракеты.

53*. Ракета, масса которой вместе с топливом $M=10$ т, падая на Землю со скоростью $v=3$ км/с вертикально вниз, начинает торможение, включив на время $T=10$ с двигатель, сопло которого обращено к Земле. За время торможения двигатель расходует $m=5$ т горючего, скорость истечения продуктов которого из сопла ракеты равна $u_0=4$ км/с. Какова будет скорость ракеты после окончания торможения? Изменением силы тяжести с высотой и сопротивлением воздуха пренебречь.

§ 11. ДВИЖЕНИЕ В СИЛОВОМ ПОЛЕ. КОЛЕБАНИЯ

Пусть материальная точка (массой m) может двигаться вдоль оси x и при этом в точке с координатой x на неё действует сила $F=F(x)$, т. е. действующая на частицу сила зависит только от её координаты. Через $x(t)$ обозначим координату частицы в момент времени t; $v(t)=x'(t)$ — скорость частицы в момент t; $a(t)=v'(t)$ — ускорение частицы в момент t. Функция $a(t)$ получается из функции $x(t)$ двукратным дифференцированием, поэтому её часто обозначают также $x''(t)$, что мы и будем делать в дальнейшем. Согласно второму закону Ньютона, $mx''=F(x)$, или, подробнее, $mx''(t)=$ $=F(x(t))$. Деля обе части этого уравнения на m и вводя обозначения $f(x)=\frac{F(x)}{m}$, получаем $x''=f(x(t))$, или, короче,

$$x''=f(x). \tag{1}$$

Функцию $x''=a(t)$ называют также *второй производной* функции $x(t)$ по t и обозначают через $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

Сила, заданная в каждой точке пространства и зависящая только от этой точки (важно, что она не зависит от скорости движения точки, как сила трения), называется *силовым полем*. Например, силовым полем является гравитационное поле неподвижных масс (т. е. совокупность сил притяжения нескольких неподвижных точек). Задача об обращении планеты вокруг Солнца — пример задачи о движении частицы в силовом поле. Ответ в этой задаче угадал Кеплер (поэтому она часто называется кеплеровой задачей, или задачей Кеплера): используя астрономические наблюдения Тихо Браге, он заметил, что планеты движутся по эллипсам. Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения и показал, как из него вытекает ответ Кеплера (т. е. решил задачу Кеплера). Эта задача сводится к исследованию уравнения вида (1), но с вектор-функцией $\vec{x}(t)$ вместо скалярной функции $x(t)$ (при этом функция f тоже превращается в векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$), значение которой в каждой точке трёхмерного пространства есть трёхмерный вектор. В этом параграфе будет рассматриваться движение вдоль некоторой прямой (оси x); при этом сила тоже предполагается направленной вдоль этой прямой. Приведём примеры.

П р и м е р 1. Ш а р и к н а п р у ж и н к е. Рассмотрим шарик с массой m, лежащий на гладком горизонтальном полу и прикреплённый к стене пружинкой. Направим ось x вдоль оси пружинки (рис. 27) и поместим на ней начало координат в положение равновесия пружинки. Тогда при отклонении шарика вдоль оси x возникает сила, направленная вдоль оси x и равная $F(x)=-kx$, где коэффициент $k>0$ характеризует жёсткость пружинки. Если

$x > 0$, то сила $F(x)$ направлена влево, так как пружинка растянута, а если $x < 0$, то сила направлена вправо, так как пружинка сжата (см. рис. 27, *б*, *в*). Это соответствует формуле $F(x) = -kx$. Уравнение (1) приобретает в этом случае вид

$$x'' = -\frac{k}{m}x, \quad \text{или} \quad x'' = -\omega^2 x, \qquad (2)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

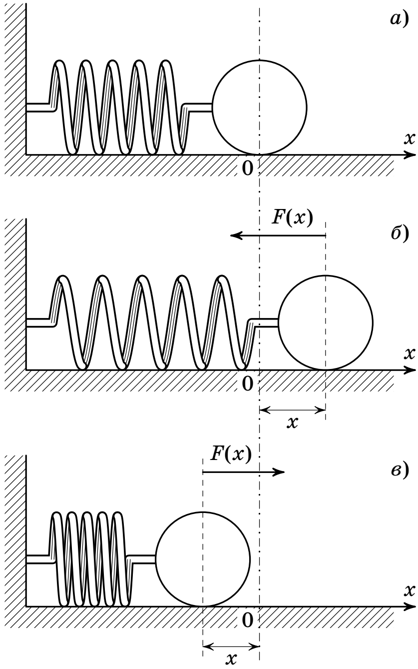


Рис. 27

Выведем для общего уравнения (1) закон сохранения энергии. Для этого перепишем его в виде $v'(t) = f(x(t))$ и умножим обе части на $v(t) = x'(t)$. Тогда получим

$$v(t)\, v'(t) = f(x(t))\, x'(t). \qquad (3)$$

Левая часть может быть записана как производная:

$$v(t)\, v'(t) = \left(\frac{1}{2}v^2(t)\right)'.$$

Попробуем сделать то же самое с правой частью. Обозначим через $g(x)$ первообразную функции $f(x)$, т. е. $g(x) = \int f(x)\,dx$, тогда $g'(x) = f(x)$; теперь положим $U(x) = -g(x)$. Тогда

$$f(x(t))\, x'(t) = (g(x(t)))' = -(U(x(t)))'$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Из (3) получаем

$$\left(\frac{v^2(t)}{2}\right)' = -(U(x(t))'$$

и, следовательно,

$$\frac{v^2(t)}{2} = -U(x(t)) + E,$$

где E — постоянная. Иначе:

$$\frac{v^2(t)}{2} + U(x(t)) = E.$$

Функция $U(x)$ называется *потенциальной энергией*. Она может быть записана, например, в виде

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Если считать, что $m=1$ (что всегда может быть достигнуто изменением единиц массы), то $U(x)$ — работа, которая совершается силами данного поля при перемещении тела из точки x в фиксированную точку x_0. Выбор точки x_0 неважен, при другом выборе x_0 величина $U(x)$ изменится на постоянную.

Используем закон сохранения энергии для решения задачи о шарике на пружинке. В этом случае

$$U(x) = \frac{k}{m}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{\omega^2 x^2}{2},$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, откуда закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{(x'(t))^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2(t)}{2} = E.$$

При данном E это уравнение близко к типу, который мы уже изучали. Если $E=0$, то $x(t)=0$, что соответствует тому, что шарик покоится в положении равновесия. Пусть $E>0$. Тогда, решая уравнение относительно $x'(t)$, получаем

$$x'(t) = \pm\sqrt{2E - \omega^2 x^2(t)}.$$

Считая, что подкоренное выражение не обращается в ноль (на самом деле оно может обращаться в ноль лишь при отдельных значениях параметра t), получаем

$$\frac{x'(t)}{\pm\sqrt{2E-\omega^2 x^2(t)}} = 1. \qquad (4)$$

В соответствии со способом решения уравнений такого типа, описанным в § 6, теперь следует искать первообразную от функции $h(x) = \dfrac{1}{\pm\sqrt{2E-\omega^2 x^2}}$. Перепишем её в виде

$$h(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2E-\omega^2 x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2E}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{2E}x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2E}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega x}{\sqrt{2E}}\right)^2}}.$$

Из закона сохранения энергии ясно, что $\frac{\omega^2 x^2(t)}{2} \leqslant E$, откуда $|x(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Положим $A = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. В дальнейшем будет ясно, что $|x(t)|$ иногда достигает значения A. Число A называется *амплитудой* рассматриваемого колебания. Имеем: $\frac{1}{\sqrt{2E}} = \frac{1}{\omega A}$, и нужно вычислить первообразную для функции

$$h(x) = \pm \frac{1}{\omega A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}}.$$

Для этого сначала вычислим производную от функции $y = \arcsin x$, обратной к функции $x = \sin y$ при $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \left.\frac{1}{(\sin y)'}\right|_{y = \arcsin x} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

где $\alpha = \arcsin x$ — такой угол, что $\sin \alpha = x$ и $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Поэтому $\cos \alpha \geqslant 0$ и $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$. Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

По формуле дифференцирования сложной функции получаем:

$$\left(\arcsin \frac{x}{A}\right)' = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}},$$

откуда первообразная для функции $h(x)$ имеет вид

$$\pm \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{A}.$$

Из уравнения (4) получаем теперь $\pm \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{A} = t - t_0$, здесь t_0 — произвольная постоянная. Умножая обе части равенства на $\pm\omega$, применяя функцию sin к обеим частям и умножая обе части получившегося равенства на A, получаем

$$x = A \sin(\pm\omega(t - t_0)) = \pm A \sin(\omega t + \varphi),$$

где φ — произвольная постоянная, называемая *сдвигом фазы*. Кстати, беря $\varphi = \varphi_1 + \pi$, получим $\sin(\omega t + \varphi) = -\sin(\omega t + \varphi_1)$, так что выбором φ можно менять знак перед A. Таким образом, если считать

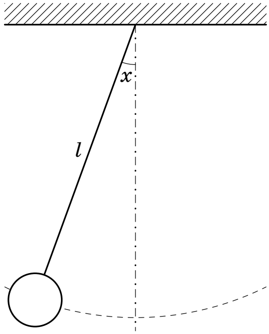


Рис. 28

сдвиг фазы произвольным, то можно опустить $\pm$, и окончательно получаем:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi). \qquad (5)$$

Легко непосредственно проверить, что такая функция $x(t)$ является решением уравнения (2) уже при всех t. Величина ω называется *круговой частотой колебания*. Период колебания $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

П р и м е р 2. Рассмотрим настоящий м а т е м а т и ч е с к и й м а я т н и к (рис. 28). Пусть l — длина его нити, m — масса шарика (малого размера по сравнению с l), подвешенного на нити, а $x=x(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Рассматривая силы, действующие на шарик, и ускорение шарика, можно получить уравнение

$$mlx''=-mg\sin x$$

или

$$x''=-\frac{g}{l}\sin x. \qquad (6)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{(x')^2}{2}+\frac{g}{l}(1-\cos x)=E.$$

Пользуясь этим точным законом, можно найти скорость шарика в любой точке x и все действующие на него в этой точке силы. При малых x уравнение (6) приближённо записывают в виде

$$x''=-\frac{g}{l}x,$$

что совпадает с уравнением (2), но с $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Поэтому можно ожидать (и это на самом деле так), что при малых отклонениях маятника от положения равновесия решения (6) будут близки к решениям вида (5). При этом период малых колебаний равен

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим к о л е б а н и я ш а р и к а н а п р у ж и н к е с у ч ё т о м т р е н и я, считая трение пропорциональным скорости. Тогда к силе упругости пружинки прибавляется сила трения $F_{\text{тр}}=-bx'$, и уравнение приобретает вид: $mx''=-kx-bx'$, или

$$x''+\gamma x'+\omega^2 x=0, \qquad (7)$$

где $\gamma=\frac{b}{m}$, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Попробуем решить уравнение (7). Для этого введём неизвестную функцию $y(t)=e^{\alpha t}x(t)$.

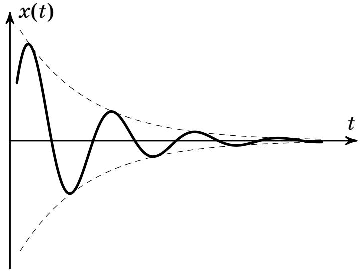


Рис. 29

Чтобы составить для неё уравнение, подставим $x(t)=e^{-\alpha t}y(t)$ в уравнение (7). Дифференцируя, получаем:

$$x'(t)=e^{-\alpha t}y'(t)-\alpha e^{-\alpha t}y(t),$$
$$x''(t)=e^{-\alpha t}y''(t)-2\alpha e^{-\alpha t}y'(t)+\alpha^2 e^{-\alpha t}y(t).$$

Подставляя эти выражения в (7), имеем:

$$e^{-\alpha t}(y''(t)+(\gamma-2\alpha)y'(t)+(\alpha^2-\gamma\alpha+\omega^2)y(t))=0.$$

Чтобы уничтожить член с $y'(t)$, возьмём $\alpha=\frac{\gamma}{2}$. Тогда после сокращения на $e^{-\alpha t}$ получим уравнение

$$y''(t)+\omega_1^2 y(t)=0, \quad \text{где} \quad \omega_1=\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Будем считать, что трение не очень велико, так что $\omega^2>\gamma^2/4$. Тогда для $y(t)$ получаем уравнение вида (2), но с ω_1 вместо ω. Поэтому $y(t)=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi)$, и

$$x(t)=A_1 e^{-\gamma t/2}\sin(\omega_1 t+\varphi), \qquad (8)$$

здесь постоянные A_1 и φ могут быть определены из начальных условий $x(0)=x_0$, $x'(0)=v_0$.

Формула (8) описывает затухающие колебания. График $x(t)$ имеет вид колебаний с амплитудой, убывающей по закону $A_1e^{-\gamma t/2}$ (рис. 29). Трение уменьшает и частоту колебаний, так как $\omega_1<\omega$. Если $\gamma=0$, то формула (8) переходит в формулу (5), описывающую колебания без трения.

54. Предположим, что вдоль всей земной оси от Северного полюса к Южному прорыт колодец и какой-то предмет уронили в этот колодец (без начальной скорости) на Северном полюсе. Как он будет двигаться? За какое время он достигнет центра Земли?

Достигнет ли он Южного полюса? При решении надо использовать тот факт, что на небольшое тело, находящееся внутри Земного шара на расстоянии d от его центра, действует сила притяжения, направленная к центру Земли и равная по величине силе притяжения его материальной точкой (расположенной в центре Земли), имеющей массу, равную массе лишь той части Земного шара, которая попадает в шар радиуса d с центром в центре Земли (это утверждение, доказанное Ньютоном, равносильно тому, что если есть тонкая однородная сфера, то внутри неё все силы притяжения уравновешиваются, а снаружи её притяжение таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре). При решении задачи считать, что плотность Земли всюду постоянна. Радиус Земли равен 6400 км. Сопротивлением воздуха пренебречь.

55*. На Южном полюсе Земли установлена пушка, дуло которой направлено вертикально вверх. Из этой пушки выстрелили снарядом. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением воздуха и Земли к другим небесным телам, описать, как будет меняться скорость снаряда в зависимости от расстояния от снаряда до Земли. С какой скоростью должен вылететь снаряд, чтобы он никогда не вернулся на Землю?

56*. Решить уравнение $y''-k^2y=0$ и с помощью этого решения описать колебания шарика на пружинке с большим трением, т. е. при условии $\omega^2<\gamma^2/4$ в обозначениях примера 3. Сколько раз в этом случае решение $x(t)$ может обращаться в ноль?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

§ 1.

1. 48 км/ч. **2.** $a<0$, $b>0$, $c>0$. **3.** См. рис. 30. **4.** $y=4-x$. **5.** 17; -3. **6.** а) $4006x(x^2+1)^{2002}$; б) $2x\cos x^2$; в) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; г) $2xe^{x^2}$; д) $e^x\cdot e^{e^x}$; е) $-\sin x\cos\cos x$; ё) $\dfrac{1}{2}x^4(x^5+1)^{-9/10}$. **7.** 1/4. **8.** Если поместить начало координат в центр окружности и направить ось x туда, где движущаяся точка находится в начальный момент $t=0$, то $x=R\cos\omega t$, $y=R\sin\omega t$, где R — радиус окружности, ω — угловая скорость движения ($\omega>0$, если движение происходит против часовой стрелки, и $\omega<0$, если по часовой стрелке). Тогда вектор скорости имеет вид $(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t)$ и перпендикулярен радиус-вектору $(R\cos\omega t, R\sin\omega t)$, направленному из начала координат в движущуюся точку, поскольку скалярное произведение этих векторов равно нулю. **9.** Этот путь состоит из таких двух отрезков прямых (он преломляется на границе сред), что если α_1, α_2 — углы этих отрезков с перпендикуляром к границе сред (рис. 31), то $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1}=\dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

§ 2.

10. а) 8; б) 1001; в) 45; г) 33; д) 2003; е) 5; ё) 100; ж) 2003; з) x. **11.** *Указание*: взять логарифм с основанием b от обеих частей формулы $a^{\log_a x}=x$. **12.** *Указание*: воспользоваться результатом задачи 11 с $x=b$. **13.** а) 4,6; б) $-2{,}3$; в) 1,6; г) 0,7; д) 1,5; е) 0,69; ё) 3,2; ж) 3,0; з) $-0{,}69$; и) $-4{,}6$; й) 22 000.

Указание: $\log_{10} e^{10}=10\log_{10} e\approx 4{,}34$, откуда $e^{10}\approx\approx 10^4\cdot 10^{0,3}\cdot 10^{0,04}\approx 10^4\cdot 10^{\log_{10} 2}\cdot 10^{0,04}=2\cdot 10^4\cdot e^{0,04\ln 10}\approx\approx 2\cdot 10^4\cdot e^{0,1}\approx 2\cdot 10^4(1+0{,}1)=22\,000$. **14.** а) $\log_2 3>\log_3 4$. Указание: $2\log_2 3=\log_2 9>3$, $2\log_3 4=\log_3 16<3$; б) $\log_5 7>\log_7 8$. Указание: проверить, что $5\log_5 7>6>5\log_7 8$. **15.** $\log_2 3\approx 1{,}6$. Указание: для вычисления $\log_a b$ с точностью до 0,1 достаточно указать такое целое n, что $n\leqslant 10\log_a b<n+1$, т. е. $a^n\leqslant b^{10}<a^{n+1}$. **16.** См. указание к задаче 15. **17.** Указание: Заменить e на $2{,}7=0{,}1\cdot 3^3$ и использовать указание к задаче 15. **18.** а) $\frac{2}{x}$; б) $\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{2x\ln x}{(x^2+1)^2}$; в) $\frac{1}{x\ln x}$; г) $\frac{1}{x\ln 2}$; д) $2^x\ln 2$; е) $\frac{3x^2}{(x^3+1)\ln 10}$. **19.** Указание: используя формулу бинома Ньютона, доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

отсюда вытекает, что $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Рассмотреть отношение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\left\{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}-\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n^3}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right]-\ldots\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^4}<1,$$

откуда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. **20.** Указание: воспользоваться результатом задачи 19.

§ 3.

21. а) 3,75; б) 0,5; в) ln 2. **22.** а) 1; б) 6547,2; в) ln 2; г) 444; д) 2/3; е) $0{,}8(2\sqrt[4]{2}-1)$; ё) e^2-e; ж) $\frac{12}{\ln 2}$. **23.** а) $\frac{x^6}{6}+C$; б) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$; в) $\frac{2}{3}x\sqrt{3x}+C$; г) $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. **24.** Указание: достаточно рассмотреть отдельно случаи $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$.

§ 4.

25. 2. **26.** Нельзя; площадь равна 4, а интеграл равен 0. **27.** 4/3. **28.** См. рис. 32. **29.** $\pi(b-a)\times\left(R^2-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)$, где R — радиус шара, a, b — расстояния от центра шара до секущих его плоскостей ($b>a$).

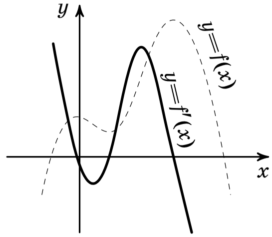


Рис. 30

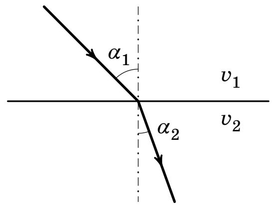


Рис. 31

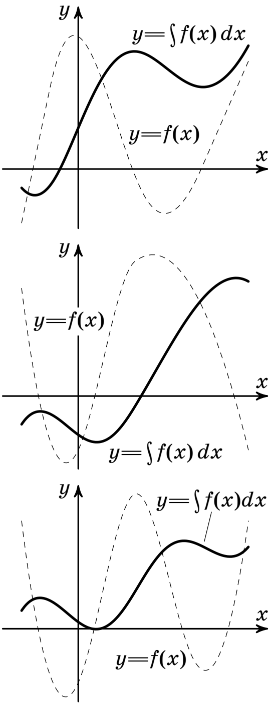


Рис. 32

30. Для пирамиды и конуса объём $V=\frac{1}{3}Sh$, где S — площадь основания, h — длина высоты; для усечённой пирамиды и усечённого конуса $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$, где h — длина высоты, S_1, S_2 — площади оснований. **32.** $\frac{1}{k+1}$. Указание: записать

$$\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right)$$

и показать, что при $n\to\infty$ эта сумма стремится к $\int\limits_0^1 x^k dx$.

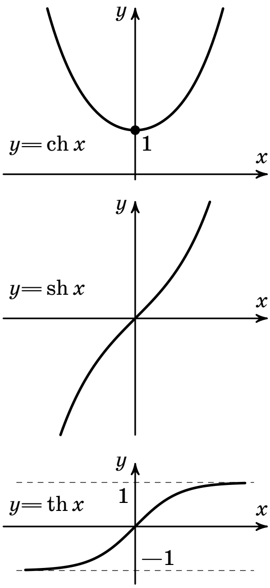


Рис. 33

§ 5.

33. 200 дней. **34.** 1600 лет. **35.** 10^9 лет. **36.** 7000 лет.

§ 6.

37. $5(2+\sqrt{2})\approx17$ мин. **38.** 27 с. **39.** Вода быстрее вытечет из воронки, обращённой вершиной вниз; примерно в 2,7 раз быстрее; 4,5 ч и 1 ч 40 мин. **40.** 4 ч. **41.** 2 ч 50 мин. **42.** 40 мин. **43.** 0,5 кг. **44.** 10 мин. **45.** 8 ч 15 мин.

§ 7.

46. $\frac{4p_0}{\rho_0 g}\approx34$ км.

§ 9.

47. 50 с; 15 м. **48.** б) 11 км/ч; в) 8,2 м; г) через 25 с. **49.** б) Через 1,15 с; в) 17,5 м. **50.** а) См. рис. 33. **51.** 1,7 с, 16 м; без учёта сопротивления воздуха 2 с, 20 м. **52.** 2,1 с, 17,5 м/с; без учёта сопротивления воздуха 2 с, 20 м/с.

§ 10.

53. $v_0+gt-u_0\ln\frac{M}{m}\approx330$ м/с.

§ 11.

54. Расстояние от центра Земли до падающего тела будет меняться по закону $x(t)=R\cos\omega t$, где $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$. Тело достигнет центра Земли за время $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\approx21$ мин, а Южного полюса за время $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\approx42$ мин. **55.** $v=v_0\sqrt{1-\frac{2gR}{v_0^2}+\frac{2R^2g}{rv_0^2}}$, где v — скорость снаряда, v_0 — начальная скорость снаряда в момент выстрела, r — расстояние от снаряда до Земли, R — радиус Земли; снаряд не вернётся на Землю, если $v_0\geqslant\sqrt{2gR}\approx11{,}2$ км/с. **56.** Решение всегда может быть представлено в любом из двух видов $y(t)=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}$, $y(t)=A_1\operatorname{ch}kt+A_2\operatorname{sh}kt$. В зависимости от соотношений между постоянными C_1 и C_2 или A_1 и A_2 оно может быть также представлено в одном из следующих четырёх видов: Ae^{kt}, Ae^{-kt}, $A\operatorname{ch}(kt+r_0)$, $A\operatorname{sh}(kt+r_0)$, где A и r_0 — произвольные постоянные, причём решение, не равное нулю тождественно, может быть представлено ровно в одном из этих четырёх видов. Такое решение может обращаться в нуль не более, чем один раз.