Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. а) Пусть x — корень уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$. Пусть

$$y=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n.$$

Тогда y есть корень уравнения

$$y^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0.$$

При этом p_1 — однородная линейная форма; p_2 — однородная квадратичная форма; …, p_n — однородная форма n-ой степени (от b_1, $b_2,\ldots,b_n$, причём все функции полиномиально зависят от a_i).

б) Пусть при этом $n=5$. Тогда $p_2=u_1v_1+u_2v_2$, где u_i, v_i $(i=1,2)$ — линейные формы от b_1,b_2,b_3,b_4. (*А. Я. Канель-Белов*)

2. Рассмотрим граф G, образованный вершинами и рёбрами четырёхмерного куба. Можно ли все рёбра графа G разбить на два гамильтонова цикла без общих рёбер? (Цикл называется *гамильтоновым*, если он обходит все вершины графа по одному разу.)
(*Л. Радзивиловский*)

3. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного, определённая в окрестности нуля. Всегда ли функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить на связную область, выходящую за пределы единичного круга? (Функция g называется *аналитической в окрестности точки*, если в этой окрестности она разлагается в ряд Тейлора.) (*Фольклор*)

4. Дана конечная группа G, разбитая на три подмножества A, B и C. Докажите, что $N_{ABC} = N_{CBA}$. (Здесь N_{UVW}, где $U, V, W \subset G$, — количество таких троек $(x, y, z) \in U \times V \times W$, что $xyz = 1$).
(*Л. Радзивиловский*)

5. Назовём число V *хорошим*, если существуют два выпуклых подмножества X, Y трёхмерного единичного куба объёма V с непересекающимися проекциями на каждую из координатных плоскостей. Найдите супремум множества хороших чисел.
(*Й. Ткадлец, А. Акопян*)

6. Пусть дана конечная последовательность W из букв «О» и «Р». Бросают монетку много раз и пишут результаты: ООРОРОО…
Докажите, что матожидание времени появления последовательности W — целое число. (*по Д. Уильямсу*)

7. Дана ортогональная матрица размера $n \times n$. Пусть d_1 — определитель её блока размера $k \times k$, стоящего в левом верхнем углу, d_2 — определитель её блока размера $(n-k) \times (n-k)$, стоящего в правом нижнем углу. Докажите, что $|d_1| = |d_2|$. (*Л. Радзивиловский*)

8. а) Раскрасим области, на которые d прямых общего положения делят плоскость, в два цвета — белый и чёрный (области, соседние по стороне, окрасим в разные цвета). Тогда число чёрных областей асимптотически не превосходит удвоенного числа белых (существует такая константа C, что разность между числом чёрных областей и удвоенным числом белых не больше $C \cdot d$).
б) На плоскости можно расположить p точек так, чтобы асимптотически $p^2/6$ прямых ($p \to \infty$) проходили ровно через три точки.
в) Выведите из п. (б), что оценка из п. (а) асимптотически достигается.

г) Постарайтесь обобщить результаты предыдущих пунктов на многомерье. (*В. И. Арнольд*, *Ю. В. Чеканов*)

9. Пусть $C(n)$ — минимальное число линий, требуемое для увеличения отрезка в n раз с помощью одного циркуля, $CL(n)$ — соответственно циркуля и линейки.
а) Докажите, что последовательность $\dfrac{C(n)}{CL(n)}$ не ограничена при $n \to \infty$.
б) Докажите, что $\lim \dfrac{C(n)}{CL(n)} = \infty$.
в) Докажите, что $CL(n) > \dfrac{\ln(\ln(n))}{1000}$.
(*А. Я. Канель-Белов*, *М. В. Алехнович*)

10. Даны натуральные n и k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Также есть множество M из n различных фруктов. *Натюрморт* — это такая последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в который каждый фрукт из M встречается ровно один раз. Есть непустое множество S, состоящее из натюрмортов. Оказалось, что для каждого натюрморта x из S есть такие k индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, что множество S содержит все $k-1$ натюрмортов, полученных из x перестановкой фруктов x_{i_k} и $x_{i_{j+1}}$ при различных j, $1 \leqslant j < k$. Докажите, что $|S| \geqslant k!$.
(*И. В. Митрофанов*)

11. а) Докажите, что плитками, изображёнными на рис. 1, можно замостить плоскость. Докажите, что любое такое замощение непериодично.

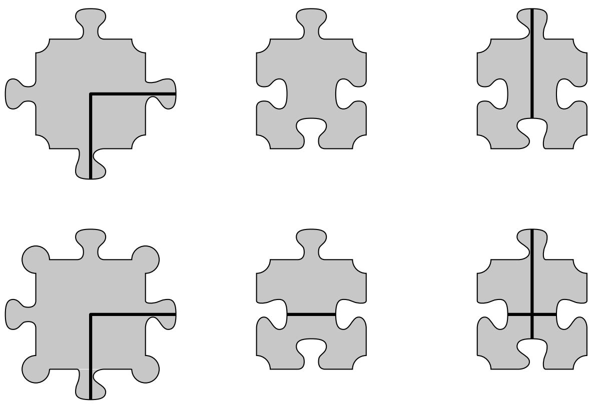

Рис. 1. Набор плиток Робинсона

б) Докажите, что плиткой, изображённой на рис. 2, можно замостить плоскость. Докажите, что любое такое замощение непериодично.

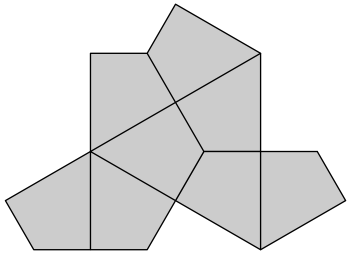

Рис. 2. Набор плиток Робинсона

в) Известно, что параллельными переносами некоторой связной плитки можно замостить плоскость. Докажите, что это можно сделать периодическим образом. (Для несвязной плитки результат неизвестен.) (*предложил А. Я. Канель-Белов*)

12. Докажите сравнение по простому модулю p

$$\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right)^{p-2} \equiv \sum_{\sigma \in S_{p-1}} x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}) \dots (x_{\sigma(1)} + \dots + x_{\sigma(p-1)}).$$

Здесь S_{p-1} — множество всех перестановок $p-1$ элементов. (*А. Н. Гришков*)

13. Дана коника Ω и точка O вне её. Прямая ℓ, касательная к конике Ω, не проходящая через O. Прямые ℓ_1, ℓ_2 — касательные из точки O к конике Ω. Точка H — ортоцентр треугольника, образованного прямыми ℓ, ℓ_1, ℓ_2. Найдите геометрическое место точек H при изменении прямой ℓ. (*К. А. Бельский*)

14. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ суть числитель и знаменатель несократимой дроби представляющей $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ Докажите, что $g(n) > n^{0{,}999 \cdot n}$ для всех достаточно больших n. (*Ф. В. Петров*)

15. Назовём m раз дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *m-хорошей*, если $f(0, \dots, 0) = 0$ и для любого $k \leqslant m$ и любого набора индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(0, \dots, 0) = 0.$$

Пусть f — некоторая m-хорошая функция. Докажите, что тогда существует набор таких $(m-1)$-хороших функций $f_1, \dots, f_k$, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = f.$$

(*Фольклор*)