Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы‘).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$? (*А. Я. Канель*)

В выпуске 28 (с. 238, см. решение: настоящий выпуск, с. 192–193) опубликована родственная

Задача 2.7$'$. У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида x^n-1 для некоторого n. (*М. Л. Концевич*)

В продолжение темы (задача была в 2020 году на отборе команды США на Международную математическую олимпиаду):

Задача 2.7$''$. *У многочленов p и $p+1$ с комплексными коэффициентами все комплексные корни имеют модуль* 1. *Найдите все такие многочлены среди приведённых многочленов с комплексными коэффициентами.* (*Ankan Bhattacharya*)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223) опубликована

Задача 3.1. Пусть A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2. Докажите *тождество Холла*: $[[A,B]^2,C]=0$. (Через $[A,B]=AB-BA$ обозначается *коммутатор*). (*М. Холл*)

В продолжение темы:

Задача 3.1$'$. *Докажите, что все тождества алгебры матриц второго порядка над комплексными числами следуют из тождества Холла и стандартного тождества степени* 4:

$$\sum_{\sigma\in S_4} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}\equiv 0.$$

(*Ю. П. Размыслов*)

Поясним, что у понятия *следования тождеств* есть две эквивалентные формулировки.

(а) Семантическая: *тождество f следует из системы $\{g_i\}_{i\in I}$, если в любой алгебре, где выполняется система $\{g_i\}_{i\in I}$, выполняется f.*

(б) Синтаксическая: *тождество f следует из системы $\{g_i\}_{i\in I}$, если оно получается из набора $\{g_i\}_{i\in I}$ с помощью следующих операций*:

1) *взятия линейных комбинаций*;
2) *умножения на многочлен* (*с двух сторон*);
3) *подстановки многочленов вместо переменных.*

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*Теорема Гаусса — Люка*)

Опубликованы родственные задачи: 3.5$'$ (выпуск 26, с. 268), 3.5$''$ (выпуск 28, с. 239), 3.5(3) и 3.5(4) (выпуск 29, с. 260).

В продолжение темы:

Задача 3.5(5). *Докажите, что центр тяжести множеств корней многочлена и его производной совпадают.* (*Фольклор*)

Развитием сюжета служит *многомерная теорема Лагранжа*:

Задача 3.5(б). *Дана непрерывно дифференцируемая векторозначная функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$. *Докажите, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \operatorname{conv}(\operatorname{Im}) f',$$

где conv — *выпуклая оболочка*, Im — *образ, т. е.* $\operatorname{Im} f' = \{f'(x)\colon x \in (a,b)\}$.
(*М. В. Коробков*)

В выпуске 3 (с. 223, см. решение: выпуск 8, с. 239–245) опубликована

Задача 3.10. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$, $x = \sum \frac{1}{a_i}$. Докажите, что в десятичном разложении числа x встречается любая комбинация цифр.
(*А. Я. Канель, А. Е. Ерошин*)

Статью А. Е. Ерошина «Периодические десятичные дроби» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8, М.: МЦНМО, с. 239–245), содержащую решение этой задачи, можно использовать на занятиях (А. Ерошин за решение этой задачи получил премию на конкурсе научных работ школьников Intel ISEF). С этим сюжетом связана несложная, но изящная и методически полезная

Задача 3.10′. Явно выпишите период дроби $\frac{1}{81}$. (*Фольклор*)

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229; выпуск 10, с. 274, 275) опубликована

Задача 7.3. Покажите, что матрицы AA^T и A^TA имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел, где A — прямоугольная матрица, A^T — транспонированная матрица. (*А. К. Ковальджи*)

В продолжение темы:

Задача 7.3′. (а) *Даны две квадратные матрицы* A, B. *Верно ли, что матрицы* AB, BA *подобны*?

(б) *Верно ли, что матрицы* A *и* A^T *подобны*?

(Матрицы X и Y *подобны*, если $X = PYP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы P.) (*Фольклор*)

В выпуске 7 (с. 187–188) опубликована

Задача 7.5. (а) При каких k через любые k точек плоскости проходит кривая n-го порядка?

(б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

(в) На плоскости отмечено несколько точек. Если кривая второго порядка проходит через пять отмеченных, то она проходит и через шестую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной кривой второго порядка. Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка. (*А. Я. Белов*)

Вот связанный сюжет:

Задача 7.5$'$. (а) *На плоскости отмечено $n \geqslant 6$ точек, никакие 6 из которых не лежат на одной квадрике. Пусть $k \leqslant n-5$. Докажите, что найдутся три точки такие, что квадрика, через них проходящая, содержит ровно k отмеченных точек.*

(б) *Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка, а также для окружностей.* (*Г. А. Гальперин*)

В выпуске 23 (с. 219, см. решение: выпуск 25, с. 178–179) опубликована

Задача 11.9$'$. Существует ли нечётнозвенная замкнутая ломаная, вписанная в квадратную решётку, все звенья которой имеют одинаковую длину? (*А. К. Ковальджи*)

Ответ отрицательный. В продолжение темы:

Задача 11.9$''$. *Существует ли пятизвенная замкнутая ломаная, вписанная в трёхмерную кубическую решётку, все звенья которой имеют одинаковую длину?* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 23, с. 224–225) опубликована

Задача 13.4. Для каких $\lambda \in [0,1]$ для любой непрерывной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $f(0)=f(1)$, обязательно найдётся такое $x \in [0, 1-\lambda]$, что $f(x)=f(x+\lambda)$? (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 13.4$'$. (а) *Рассмотрим множество V всех дифференцируемых функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, что $f(0)=0$, $f(1)=1$. Найдите все вещественные α такие, что для любого $f \in V$ существует $\xi \in (0,1)$ такое, что $f(\xi)+\alpha = f'(\xi)$.*

(*IMC-2022, предложил Mike Daas, Leiden University*)

(б) *Дана монотонно возрастающая функция $f\colon [0,1] \to [e, +\infty)$. Докажите, что для некоторых $x, y \in [0,1]$ выполняются неравенства*

$$f(y) \leqslant 2f(x), \quad y - x \geqslant \frac{1}{10\ln(f(x))^2}.$$ (*Фольклор*)

В выпуске 14 (с. 272, см. решение: выпуск 28, с. 254–255) опубликована

Задача 14.1. Дано бесконечное периодическое слово минимального периода n и два его одинаковых подслова длины $n-1$. Докажите, что их начальные буквы находятся на расстоянии, кратном n.
(*А. Я. Белов*)

В продолжение темы:

Задача 14.1$'$. *Две последовательности периодов m и n соответственно имеют общее начало длины $m+n-1$. Докажите, что они совпадают.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 15 (с. 232, см. решение: выпуск 30, с. 238–239) опубликована

Задача 15.3. Гипербола $H: xy=1$ повёрнута на угол α относительно начала координат $(0,0)$; получилась гипербола H_α. Найдите угол между их касательными в точках пересечения H и H_α.
(*А. В. Акопян, D. Schleicher*)

В продолжение темы:

Задача 15.3$'$. *Назовём гиперболу прямоугольной, если её асимптоты образуют прямой угол.*

(а) *На прямоугольной гиперболе* $\Gamma: \{xy=1\}$ *взята точка P. Точка D симметрична точке P относительно начала координат. Окружность с центром в P пересекает гиперболу Γ в четырёх точках: A, B, C, D. Докажите, что треугольник ABC — правильный.*

(б) *Дан треугольник ABC. Докажите, что центры симметрий прямоугольных гипербол, проходящих через A, B, C, лежат на одной окружности.* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 16 (с. 230, см. решение: выпуск 20, с. 263–264) опубликована

Задача 16.3. Пусть у функции, определённой на отрезке [или на прямой], в каждой точке этого отрезка [прямой] есть конечный предел (не обязательно совпадающий со значением в точке). Насколько такая функция может отличаться от непрерывной? Более точно, каким может быть множество точек разрыва у такой функции? (*М. Прасолов*)

В продолжение темы:

Задача 16.3$'$. *Производная непрерывной функции f равна нулю в каждой рациональной точке. Верно ли, что $f \equiv \mathrm{const}$?* (*Фольклор*)

В выпуске 25 (с. 168, см. решение: выпуск 26, с. 249–257) опубликована

Задача 25.4. Даны такие симметрические матрицы $A_1, \ldots, A_k$ размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами, что $\det\bigl(\sum_{i=1}^k A_i^2\bigr) = 0$. Докажите, что $\det\bigl(\sum_{i=1}^k A_i B_i\bigr) = 0$ для любых матриц $B_1, \ldots, B_k$ размера $n \times n$. (*П. Гурбанов*)

В продолжение сюжета:

Задача 25.4′. (а) *Назовём многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ хорошим, если*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \det(x_1 A_1 + \ldots x_k A_k)$$

для некоторого набора 2×2-матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вещественными коэффициентами. Для каких k все многочлены степени 2 от k переменных являются хорошими? Аналогичные вопросы для комплексных коэффициентов и старших степеней.

(б) *Даны две ортогональные вещественные матрицы A, B размера $n \times n$. Каково максимально возможное значение* $\det(A + B)$?

(*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 25 (с. 169) опубликована

Задача 25.12. Докажите, что уравнение $\operatorname{tg} x - x = a$ не имеет решений в элементарных функциях. (*А. Я. Канель-Белов*)

В продолжение сюжета:

Задача 25.12′. *Докажите, что уравнения $\sin x - x = a$ и $e^x - x = a$ не имеют решений в элементарных функциях.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: выпуск 27, с. 266–269) опубликована

Задача 26.4. Пусть $k + 2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k + 2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k, то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k. (*А. Я. Канель-Белов*)

Развитием темы служит

Задача 26.4′. (а) *Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны.*

(*Фольклор*)

(б) *Обобщите и решите задачу для случая попадания $k+1$ многомерной птички в $(k-1)$-мерное подпространство.* (*А. Я. Канель-Белов*)

Эти задачи решаются путём перевода на язык внешних произведений и определителей. Для иллюстрации силы этого метода приведём ещё несколько задач.

Задача 26.4(3). (а) *Выведите красивую формулу для площади многоугольника с последовательными вершинами* (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) (*именно в таком порядке*).

(б) *Даны описанный плоский четырёхугольник $ABCD$ и точка P в пространстве. Докажите, что*

$$PD^2 \cdot S_{ABC} + PB^2 \cdot S_{ACD} = PA^2 \cdot S_{BCD} + PC^2 \cdot S_{ABD}.$$

(в) *Дана матрица R, отвечающая вращению в трёхмерном евклидовом пространстве. Найдите угол и ось вращения.* (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 236) опубликована

Задача 27.12. (а) Укажите полную систему инвариантов обычного кубика Рубика (т. е. опишите, из каких начальных конфигураций можно его собрать).

(б) Укажите полную систему инвариантов трёхмерного кубика Рубика с ребром n.

(в) Исследуйте многомерный аналог данной задачи.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Для решения этой задачи полезна

Задача 27.12′. (а) *Пусть G, H — простые группы (т. е. не содержащие нетривиальных нормальных подгрупп) с образующими соответственно $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$, не изоморфные как группы с фиксированными наборами образующих. Рассмотрим подгруппу E прямой суммы $G \oplus H$, порождённую векторами $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$. Докажите, что $E = G \oplus H$.*

(б) *Обобщите утверждение для произведения нескольких групп.*

(Для обычного кубика Рубика i — номер поворота грани, a_i — соответствующее угловое преобразование, b_i — рёберное преобразование.) (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 29 (с. 255–256) опубликована

Задача 29.1. Докажите иррациональность числа e.

(а) Докажите, что при целых a, b величина $ae + be^{-1}$ не является целой. Выведите из этого, что e не является квадратичной иррациональностью.

(б) Усовершенствовав рассуждение, докажите, что e не является алгебраическим числом четвёртой степени.

(в) Рассмотрим интеграл

$$I_n = q^{2n} \int\limits_0^{\pi} (x(\pi - x))^n.$$

Докажите, что $I_n > 0$, $I_n \to 0$ при $n \to \infty$ и если $\pi = p/q$, где p, q — целые числа, то I_n — целое число. Выведите отсюда иррациональность числа π.

(г) Докажите иррациональность числа e^n при любом целом n.

(*Фольклор*)

Методы решения п. (б) и (в) позволяют получить следующий факт:

Задача 29.1$'$. *Докажите трансцендентность числа e, т. е. что число e не является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.* (*Ш. Эрмит*)

Дальнейшее развитие техники приводит к *теореме Линдемана — Веерштрасса*, утверждающей, что *если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимые над $\mathbb{Q}$ алгебраические числа, то экспоненты от них $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ алгебраически независимы.*