Комментарий к теореме Салливана о множестве Фату

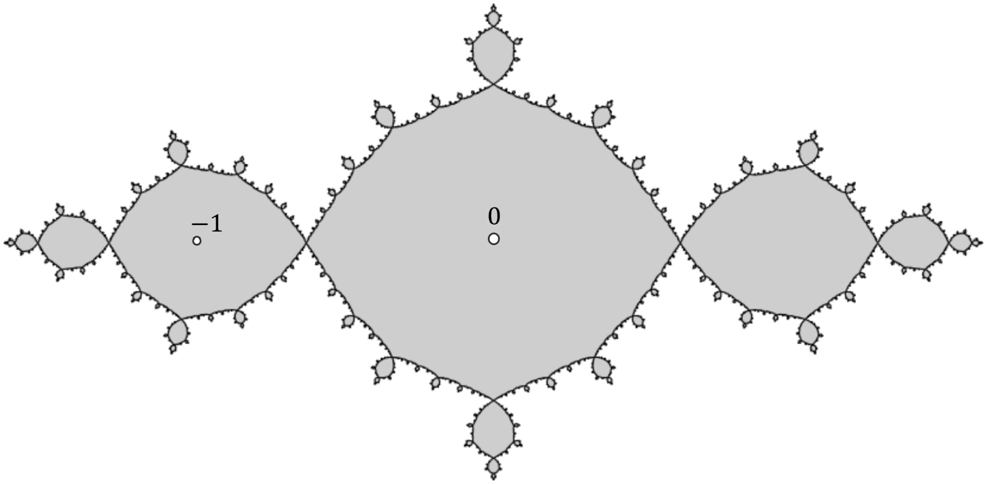
В. А. Тиморин

Работа Салливана про отсутствие блуждающих областей описывает динамическое поведение привычных функций: рациональных функций одной комплексной переменной. С точки зрения алгебры, свойства этих объектов давно известны и интереса не представляют. Другое дело — с точки зрения теории динамических систем. Простейшие нелинейные функции, такие как $f(z) = z^2 + c$ (где c — постоянная величина), способны демонстрировать сложнейшие детали самоорганизации, если рассматривать *итерации* этих отображений, т. е. применять одну и ту же функцию много раз. Начиная с комплексного числа z_0, про которое геометрически следует думать как про точку плоскости, образуем её *орбиту*, т. е. последовательность

$$z_0 \mapsto z_1 = f(z_0) \mapsto z_2 = f(z_1) \mapsto z_3 = f(z_2) \mapsto \ldots$$

Что делает эта орбита? Приближается к устойчивому состоянию или периодическому циклу? Убегает на бесконечность? (Впрочем, такое поведение тоже стоит рассматривать как стремление к неподвижному положению). Распределена хаотически? Это основные вопросы, которые рассматривает теория динамических систем вообще и комплексная динамика в частности.

Множество всех точек, орбиты которых неустойчивы (и, как правило, демонстрируют хаотическое поведение), называется *множеством Жюлиа* в честь французского математика Гастона Жюлиа. Все остальные точки образуют так называемое *множество Фату*, названное так по фамилии другого французского математика Пьера Фату. В работах Фату и Жюлиа были заложены основы комплексной динамики; в том, что их именами названы два дополнительных множества, есть как закономерность (обе фамилии по делу), так и случайность (распределение фамилий ничего не значит).



На рисунке показано множество Жюлиа отображения $f(z) = z^2 - 1$, это всё чёрные точки. Серые и белые точки образуют множество Фату, их орбиты либо асимптотически выходят на периодический цикл $0 \longleftrightarrow -1$ (серые точки), либо убегают на бесконечность (белые точки). В данном примере, как и в большинстве случаев, множество Жюлиа самоподобно, имеет интересную структуру во всех масштабах. Такие множества иногда называют *фракталами*. Что касается компонент множества Фату (на рисунке это серые области и внешняя белая область), то каждая из них рано или поздно отображается в одну из трёх периодических областей, содержащих точки $0, -1, \infty$.

Так же ведут себя компоненты Фату любой рациональной функции. Каждая компонента рано или поздно отображается в периодическую компоненту. Это теорема Салливана, которая подвела последнюю черту под описанием динамики рациональных функций на их множествах Фату (что происходит в периодических компонентах — было известно ранее, имеется небольшое число явно описанных сценариев). Но вся тема этим отнюдь не исчерпывается — до полного понимания динамики на множествах Жюлиа нам ещё очень далеко.

Владлен Анатольевич Тиморин, факультет математики НИУ ВШЭ
vtimorin@hse.ru