Математический мир

«Думать о математике — удовольствие. Где угодно. Когда угодно»

Интервью с Деннисом Салливаном

24 мая 2022 года Осло состоялась очередная, уже двадцатая по счёту, церемония вручения премии Абеля. Абелевская неделя в столице Норвегии прошла с участием не только лауреата 2022 года, но и четырёх лауреатов 2020 и 2021 годов Ласло Ловаса, Ави Вигдерзона, Григория Маргулиса и Гилеля Фюрстенберга, которые из-за ковидных ограничений не приезжали в столицу Норвегии раньше. Церемонии их награждения проходили онлайн. Научный журналист Наталия Демина побывала на Абелевской неделе и поговорила с американским математиком Деннисом Салливаном, который удостоился премии в 2022 году за «важный вклад в алгебраическую и геометрическую топологию, теорию динамических систем».

Дорогой Деннис, поздравляю вас с высокой наградой, и спасибо за согласие дать интервью. Вы поступили в бакалавриат университета на химическую инженерию. Почему выбор пал на химию, а не математику или физику?

Прежде всего, я толком не знал, как научные дисциплины организованы логически, и свой выбор сделал в старших классах школы. Я думал так: я живу в штате Техас (США). Здесь богатая нефтехимическая промышленность. И если я получу диплом по химической инженерии, то легко найду работу. А если понравится заниматься наукой, то смогу продвинуться дальше. И мне это казалось хорошим

У памятника Абелю

планом. К тому же мне нравилась наука как таковая, в старших классах школы я увлекался химией. Но затем, так как на первом курсе было несколько математических дисциплин, я заинтересовался математикой. И на втором курсе перешёл на другой факультет.

Ваши исследования в математике могут внести вклад и в химическую науку?

О, да. Я думаю, что задача, над которой я сейчас работаю, тесно соотносится с термодинамикой, являющейся частью физической химии. Математика — язык науки, дающий возможность применить полученные результаты в других областях. Если вы хотите более точной, значимой, недвусмысленной дискуссии, то лучше вести её в терминах математики.

Не прокомментируете ли слова математика Ганса Мюнте-Кааса (Hans Munthe-Kaas), главы Абелевского комитета с 2018 по 2022 годы, посвящённые вам, что вы не видите границ между разными областями в математике, которые другим коллегам кажутся очевидными. Так ли это?

Когда ты работаешь над диссертацией, то ищешь что-то новое. Искать новое — сложно, но эти новые идеи для вас родные (fit you). Иногда легче самому проводить исследования, чем изучать чью-то старую теорию, потому что она чужая вам по духу. А потом может оказаться крайне интересной.

Абелевские лауреаты (слева направо): Г. Фюрстенберг (2020), Л. Ловас (2021), Д. Салливан (2022), Э. Семереди (2012), Г. Маргулис (2020)

Обычно вокруг каждой области науки возникают научные сообщества, создаются большие научные семьи в виде научных племён. Такой интеллектуальный трайбализм, внутренняя замкнутость. Но разные области могут использовать одинаковые идеи. У меня были два друга-математика, они дружили, но никогда не обсуждали между собой свои исследования. Им казалось, что их области исследования совершенно различны, что они говорят на разных языках. Но оказалось, что основные идеи в их областях были в каком-то смысле эквивалентны!

Это свойственно людям науки. Они формируют [научные] племена. Вы ездите на конференции, вы встречаете старых друзей. Им интересно то, что вы делаете. А вам — что делают они. И вам этого достаточно. У вас жена/муж, дети, ученики, плюс большая научная семья. Вам надо преподавать и заниматься исследованиями. И так естественно оставаться внутри своего круга… Но я всегда был аутсайдером, понимаете?

Вы выступаете своего рода переводчиком, создаёте словарь между разными языками математики?

Да. Мне нравится делать идеи простыми. А когда они становятся простыми, то часто применяются и в других областях. Точек различия не так уж много. Я думаю, что понимаю, почему люди объединяются в [научные] племена, но… Когда я был ребёнком [в 1956 г.], мне было 10 лет, и большинство американцев поддержало республиканца

Дуайта Эйзенхауэра на выборах президента США. Он был очень популярным. А я услышал по ТВ выступление его оппонента, кандидата от демократов Эдлая Стивенсона (Adlai Stevenson II). И мне показалось, что он интеллигентнее, чем его оппонент. Я тогда не знал всех слов, которые он использовал, но я восхищался его манерой говорить и тем, что он говорил. И тогда я решил, что не буду подстраиваться под мнение большинства, а буду поддерживать то, что мне самому кажется правильным, даже если этот выбор выведет меня из зоны комфорта. Мне не нужен комфорт, который не согласуется с моими внутренними убеждениями.

А вы по-прежнему интересуетесь политикой?

Интересуюсь, но стараюсь о ней не думать.

Чтобы не тратить время?

Да, и я стараюсь размышлять о том, что знаю и во что могу привнести что-то новое, а это математика.

Какие ваши математические идеи вам кажутся наиболее важными?

Если бы я выступал перед аспирантами, то я сказал бы им не о какой-то особой идее, а скорее о методе, который состоит в попытке понять суть вещей и сделать идею простой. И я бы сказал, что иногда полученный результат пересекает границы разных областей математики. И я бы ещё сказал им, что если ты знаешь что-то об одной области и о другой, то ты можешь попытаться доказать что-то интересное [на стыке областей]. Но для этого у тебя должны быть познания в разных областях математики.

Есть знаменитая, может быть, даже самая известная теорема XX века, теорема Атьи — Зингера об индексе[1] (1963 г.). Майкл Атья (Michael Atiyah) и Изадор Зингер (Isadore Singer) получили Абелевскую премию 2004 года, став вторыми лауреатами этой награды[2]. И эта теорема оказывается синтезом идеи из анализа и идеи из топологии. И я помню день, когда на лекции обсуждалась эта теорема, включая аналитическую часть. Я понял лишь топологическую часть, для меня как аспиранта она была очевидной. Потом я спросил парня, сидевшего возле меня, понял ли он аналитическую часть. Он удивился: «Разве она была трудной? Всё же ясно». И это так здорово! Он понял одну

[1] Утверждение о равенстве аналитического и топологического индексов эллиптического оператора на замкнутом многообразии. — *Прим. ред.*

[2] Атья в 1966 стал лауреатом премии Филдса. — *Прим. ред.*

С женой Мойрой

часть, я — другую. Две части доказывают теорему. И это самая известная теорема двух десятилетий. И мне импонирует идея поиска простого решения сложной задачи, некоего подземного хода между домами.

Вы идёте в глубину математики?

Да, создавая такие взаимосвязи.

Вас называют виртуозом в математике. Есть ли музыка, которая вам кажется топологической?

Я не воспринимаю себя как виртуоза в математике. Я скорее как Зигмунд Фрейд (*смеётся*). Ведь он был мотивирован поиском простых базовых вещей.

А вы играете на чём-то?

Я бы хотел, но нет.

А какую музыку любите слушать?

Я перестал слушать музыку, так как не очень умею обращаться с этими онлайн-устройствами. Но иногда моя жена Мойра включает что-то, и я слушаю. Мне нравятся, скажем, песни в исполнении Фрэнка Синатры. Под них я могу заниматься спортом. Раньше я любил слушать пластинки и диски с классической музыкой, но их время ушло.

Почему вы не опубликовали ваши заметки с новой парадигмой в топологии, как только их написали в 1970 году в Массачусетском технологическом институте? Почему они ждали

публикации почти 40 лет? Эти заметки выпускались даже самиздатом. Он был широко распространён в СССР (Солженицын и др.). Наверняка вы слышали об этих практиках?

Да.

Я процитирую статью коллеги из газеты El Pais, посвящённую вам: «Он никогда не публиковал свои заметки, но его коллеги начали их ксерокопировать, и те начали своё путешествие по миру, во всё более трудно читаемых копиях, и даже в таком качестве сохраняли характер сакрального текста». Почему же не получилось опубликовать заметки о топологии сразу после их написания?

Это были своего рода заметки на полях. Они включали дополнительный материал, который я изучал, плюс новый материал. Там было всестороннее обсуждение разных вопросов. А потом я переключился на новые темы и не хотел шлифовать свои заметки до публикабельного вида. Это одна из причин, почему бóльшая часть моей работы реально неизвестна. Я имею в виду, что хотя о какой-то части теперь знают благодаря этой премии, но большая часть не закончена, не дошлифована. Если я понял, как задача решается, то мне этого достаточно, я не очень люблю доводить свои идеи до блеска. В этом смысле если я что-то публикую, то не в журнале, а в сборниках докладов на конференциях, потому что там не просят поправить то или это и охотно публикуют в том виде, в каком им отправишь. В моих статьях нет ошибок, но в таких сборниках стиль публикации более свободный. Так что я пошёл по этому ленивому пути. Короткий ответ на ваш вопрос таков: моя лень.

Скажите, почему для вас было важно доказать гипотезу Пьера Фату об отсутствии блуждающих компонент и с чем был связан первоначальный интерес к этой задаче?

Я что-то знал об этой области и о другой, но ничего не знал о гипотезе Фату и случайно обнаружил аналогию между разными областями. И оказалось, что если ты применяешь метод из одной области математики к другой, то видишь, что структура, лежащая в основании обеих, одна и та же. Так и в этой задаче. Одна область была связана с клейновыми группами, динамикой и комплексным анализом. А другая — с итерациями рациональных функций, и она тоже связана с динамикой и комплексным анализом. Оказалось, что методы решения задач в одной области имело смысл применить к другой, чтобы получить новый результат — доказать гипотезу Фату.

Оказалось, что если ты используешь свои знания в одной области, применяешь их к другой и проводишь проверку, то этот метод работает. И временная последовательность была такой: я услышал о гипотезе Фату в течение рабочей недели, а на выходных её уже доказал. Но это не потому, что я так быстро решаю задачи. Я как раз решаю их не быстро. Просто была задача, готовая к решению моим методом. Я использовал технику, широко применяемую в одной области математики, для другой. И это было самым важным в продвижении к решению этой задачи.

Это ещё одна иллюстрация к тому, как важно знать что-то из разных областей математики. А потом ты ищешь подземный ход между разными областями.

Как вы находите интересную для себя задачу? Или она вас находит? Почему ваш выбор падает на эту задачу, а не другую?

Я не выбираю задач. Я хочу понять основания того, что происходит в разных областях математики, и перевести понятое на простой язык. А на этом пути нередко появляется возможность использовать своё понимание одной области математики для решения задач в другой.

Можете ли вы рассказать хотя бы об одном из соображений, которые привели к доказательству гипотезы Фату?

В исследованиях ты постоянно ставишь один и тот же вопрос: есть математический объект, который ты изучаешь, какова же структура этого объекта? В случае гипотезы Фату объектом была рациональная функция на сфере Римана. И мы применяем эту функцию много раз.

Что мы видим? Прежде всего, что это отображение пространства на себя. Оно определяет динамическую систему. Точки начинают гулять по сфере, и ты смотришь на эту динамику как на часть структуры. Во-вторых, эта динамическая система сохраняет комплексную структуру. И возникает вопрос: существует ли блуждающая область? Ответ на него: нет[3)].

Но затем, если ты выдвигаешь гипотезу, как сделал Пьер Фату в 1906 году[4)], то что дальше? Ещё в XIX веке Бернхард Риман внёс существенный вклад в решение этой задачи. Он придумал способы изменения голоморфной структуры на поверхностях, которые теперь

[3)] Как раз эту теорему в 1985 году доказал Д. Салливан. —*Прим. ред.*

[4)] Фату предположил, что блуждающих областей для итерированных рациональных функций не существует. Ныне это утверждение называют теоремой Салливана. —*Прим. ред.*

называются римановыми поверхностями. Примечательно, что есть только конечное число сторон (направлений), в которых можно менять комплексную структуру. (В 1980 году я использовал эти стороны, отмеченные Риманом в 1850 г., уже в современной форме для изменения структуры, лежащей в основе решения проблемы Фату (1906). Если бы ответом было «нет», то существовало бы бесконечно много сторон, а это привело бы к противоречию с конечностью числа сторон, отмеченной Риманом).

В 1960-е годы важный вклад внесли Альфорс и Берс (L. V. Ahlfors and Lipman Bers), которые, в свою очередь, опирались на идеи Чарльза Моррея (Charles Morrey Jr.), работавшего в этой области с 1930-х. Появилась теория клейновых групп. Появилась теория деформаций: ты можешь взять клейнову группу, деформировать её в другую клейнову группу, не эквивалентную исходной, так что ты можешь изменять комплексную структуру, лежащую в её основе. Таким образом, мы имеем теорию деформации комплексных пространств, берущую в данном случае своё начало с Римана. А в динамике это ещё более сложно. Я коротко пересказываю то, что было сделано в 1960-е.

А решение пришло мне в голову, когда я услышал о гипотезе Фату на обычной лекции, где перечислялись некоторые проблемы теории итерированных рациональных функций.

И мне в голову пришла идея. Пусть у нас есть динамическая система и инвариантная конформная структура. Есть теория деформаций динамических систем с инвариантной конформной структурой. А не применить ли мне её здесь и сейчас?

И вот блуждающая область. Тут нужно применить небольшой хитрый трюк. О нём я не буду рассказывать, а моё решение, если не уходить в нюансы, таково.

Блуждающей области соответствует бесконечномерное пространство деформаций. Однако рациональную функцию можно представить как дробь, в числителе и знаменателе которой полиномы с конечным числом коэффициентов. Так что у нас может быть лишь конечномерное пространство рациональных функций и не может быть бесконечномерного пространства деформаций. Таким образом, мы пришли к противоречию, из чего следует, что блуждающей области не существует.

Таково краткое изложение моего доказательства. И тут большую роль сыграла удивительная теория деформаций, которую я позаимствовал из той области математики, которая ведёт своё начало от Анри Пуанкаре.

Стоит отметить, что Пьер Фату и другие не знали о теории деформаций. К ней математики пришли только в 1930-е. Здесь мы пришли к истории математики, которую изучает моя жена. Но мне тоже интересно разбираться в истории математических идей. Когда я изучаю какую-то проблему, то мне интересно узнать, кто думал над этой задачей, кем и когда было найдено то или иное решение, а что оставалось непонятым и нерешённым. Мне интересно увидеть историческую ретроспективу развития той или иной идеи. Поэтому я тоже в какой-то мере являюсь историком математики и её понимания.

Если же вернуться к вашему вопросу, то дело обстояло так: Пьером Фату гипотеза была выдвинута в начале 1900-х. А я о ней не знал. В 1960-е была изобретена техника, которая позволила доказать какие-то классные вещи. И вот в 1979 или 1980 году я на лекции узнаю о гипотезе Фату. И понимаю, что у меня есть все компоненты для её доказательства, нужно лишь немного над ним поработать. Так что ответ на ваш вопрос таков: суть задачи совпадала с уже мной решённой.

Каковы приложения этого доказательства в реальной жизни?

В нашей повседневной жизни? Ок. Одно из приложений, на которое я потратил почти десять лет, называется универсальность в каскадах удвоения периода (universality in period doubling cascades), что чем-то похоже на фазовый переход в физике, но формулируется как математическая задача. Если вы возьмёте жидкость и охладите её до замерзания, то получите кристалл. В физике много примеров подобных фазовых переходов в жёсткую структуру. И это интересно изучать и с математической точки зрения.

С 1970-х и далее были получены различные результаты по жёсткости в динамике в некоторых особых обстоятельствах. Физики вычислили, что в определённой динамической системе тоже есть феномен жёсткости. Они могут посчитать некоторое число и всё время получают одно и то же 0,53804514358054991… И у этого числа есть геометрический смысл — фрактальная размерность. Это чисто математическое утверждение, но оно соответствует универсальности фазового перехода в физике.

Итак, 1982 год. Я услышал о данной проблеме и решил, что могу бросить то, чем я занимался, чтобы перейти к данной задаче. Она подпадает под все мои идеи в динамике, но является более специальной. Но и общей также, из-за проблемы универсальности. И я мог не беспокоиться, что появится контрпример, потому что расчёты на компьютере всё время показывали одно и то же число 0,538045…

Если вы представите себе формулу определённого типа, зависящую от бесконечного числа параметров, вы можете подкрутить один параметр, а можете другой, и затем вычисляете это число. И так с разным набором параметров. Но всё время получите 0,538045… Я впервые встретился с ситуацией, когда я знал, что что-то верно, до того, как я это доказал. До этого только то становилось верным, что я мог доказать. Так что я бросил все дела и занялся этой задачей.

Это точное утверждение, которое на самом деле не является теоремой, так как это лишь эксперимент — искомое число получается в ходе вычислений. Но вы можете сформулировать этот результат как математическую теорему. И физик, вычисляющий это число с интуитивным знанием о фазовом переходе (возвращаясь к вашему вопросу о реальной жизни), затем получает жёсткость, универсальную структуру. И наше утверждение становится истинной теоремой без доказательства.

Я знал, что в теории динамических систем пока нет методов доказать эту теорему. Точнее были какие-то методы, но с определёнными пробелами. Так что я решил, что могу над этим поработать, но для доказательства теоремы мне нужно будет найти некоторые новые методы в математике.

И оказалось, что последним шагом в доказательстве является то, что надо вернуться к ранее полученным мной же результатам и к идеям, использованным при решении той же задачи Фату, даже если она поставлена для одной действительной переменной, но ты комплексифицируешь эту переменную, комплексифицируешь эту ситуацию[5].

Сейчас известно, как доказать универсальность в тех случаях, когда этот метод работает, когда мы можем применить идеи, использованные для решения задачи Фату. И это — их приложение к реальной жизни. Но что до сих пор не известно, уже в течение 40 лет — как доказать универсальность для других случаев.

Изменил ли предложенный вами способ решения задачи Фату ландшафт данной области голоморфной динамики, на ваш взгляд?

О да. Это инструментальный метод… С его помощью уже и мои коллеги смогли стартовать. Определённые динамические характеристики не разрешены, потому что у вас не может быть бесконечномерного пространства деформаций. А всё пространство объектов конеч-

[5] Подробнее см. статью Д. Салливана `http://www.math.stonybrook.edu/~dennis/publications/PDF/DS-pub-0092.pdf`. — *Прим. ред.*

номерно. Так что у вас появляется мощная методика, которая была доступна с 1930-х и потеряна во время войны. Так или иначе, о ней вновь вспомнили в 1950-е и 1960-е. Это главное, и это даёт мощный метод. И пошло продолжение. Но я ушёл из этой области, когда я узнал о проблеме универсальности (о которой рассказал ранее). Доказательство у меня заняло восемь лет. И я уже устал от этой темы и решил заняться чем-то другим.

Думаете ли вы над разными задачами одновременно или сначала над одной, потом другой?

Это скорее черта российской математической школы, даже люди уровня Владимира Арнольда и большинство тех, с кем я знаком, часто думают о задачах и вызовах. У меня другой подход. Если даже есть нерешённая задача или открытый вопрос, то я склонен изменить постановку задачи на такую, которую я могу понять. Мне реально нравится приходить к пониманию изучаемой проблемы. И я обдумываю те или иные вопросы, хочу понять что-то в рамках поставленной темы или относящейся к ней. Так что это несколько другой подход.

Есть ли у вас любимое число?

Ммм... 37 — интересное.

Почему?

В XIX веке теорему Ферма была доказана для всех простых чисел, строго меньших числа 37. В общем же случае теорема была доказана Эндрю Уайлсом совсем недавно[6], хотя Пьер Ферма сформулировал её много лет назад[7]. Число 37 — первое иррегулярное простое число, т. е. такое, для которого аналог основной теоремы арифметики (фундаментального факта о единственности разложения натуральных чисел в произведение простых), несостоятелен настолько сильно, что препятствует прямому доказательству проблемы Ферма[8].

В ходе поиска доказательства была открыта новая область математики — теория алгебраических чисел, где обычные числа (целые) обобщены до алгебраических целых, т. е. тех чисел, которые являются корнями уравнений $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $a_1, \ldots, a_n$ — обычные целые числа.

[6] В 1994 году. — *Прим. ред.*

[7] В 1637 году. — *Прим. ред.*

[8] Единственность разложения неверна и для некоторых простых, меньших чем 37, но для них есть способ обойти это обстоятельство; иррегулярность связана с некоторым свойством делимости чисел Бернулли. — *Прим. ред.*

Новой теории чисел предстояло стать глубокой и полноценной областью математики, прежде чем математики смогли вернуться к гипотезе Ферма и доказать её.

Что бы вы сказали молодым ребятам, думающим о математической карьере?

Заняться изучением математики — очень полезно, и не важно, что вы потом собираетесь делать. Полезно получить хотя бы некоторое представление о математике как науке. Понять её методы. Понять, что поняли другие. Люди ведь обычно не осознают, что многие утверждения, которые мы слышим ежедневно, не являются точными. И высказываемые мнения часто глупы, так как строятся на нечётких утверждениях. Обычно это случается, если утверждения слишком сложны и их трудно проанализировать.

Но человечество создало область науки, где большинство утверждений чётко определено и где нет субъективных мнений. В ней утверждение либо доказуемо, либо к нему есть контрпример (и тогда оно ложно), либо о нём пока неизвестно, верно оно или нет. Вы можете сказать, что ваше утверждение верно, но, пока вы его не доказали, ваше мнение на этот счёт не будет иметь никакого значения. И эта область называется математикой.

Кто-то может сказать: да, но математику же нельзя применить ко многим областям жизни! И всё же благодаря математике вы можете научиться критическому мышлению. Вы можете начать анализировать: что вам известно? Какие у вас есть факты? И построить как можно более точное утверждение, основываясь на известных вам фактах. И если вы освоите математический метод, то этот навык может оказаться востребованным везде. Критическое мышление очень полезно! Если вы хотите найти хорошо оплачиваемую работу, то на какое-то время займитесь математикой, она поможет вам добиться успеха. А если вы решите пойти в науку, то знание математики будет ещё более полезным.

Замечу, что занятие математикой — крайне увлекательное дело, которое в то же время требует серьёзной работы.

В 1980-е годы вам приходилось много летать на «Конкорде» из Парижа в Нью-Йорк и обратно с одной работы на другую. Помогали ли перемещения в реальной жизни путешествиям в топологическом пространстве?

Мне приходилось много летать, и не раз во время полёта я общался с Бенуа Мандельбротом (Benoit Mandelbrot), и мы говорили о фрактальных множествах, в том числе о множестве Мандельброта, одном из самых известных фракталов. Удивительное совпадение, зная, какую задачу мне потом пришлось решать.

А ответ на ваш вопрос таков: математик в любое время и в любом месте одиночка и если его интересует какая-то задача, то он будет над ней думать, где угодно и когда угодно. Всё, что ему нужно, это маленький клочок бумаги и карандаш.

И вам не нужен тихий офис? Длительные прогулки?

Обычно во время прогулки я раздумываю над общими вопросами, а для детального анализа нужен лишь любой клочок бумаги. Пусть даже билет на поезд, что угодно, на чём можно написать.

А если у математика есть какие-то проблемы в жизни, то он не должен о них думать, когда решает задачу. Математика — это и прекрасный товарищ, и вдохновение, и друг, и оппонент. Математика — это всё. Думать о математике — удовольствие. Где угодно. Когда угодно.

Извините за вопрос не о математике. Боитесь ли вы смерти?

Вы знаете — да. Мне не нравится сама её идея (I'm afraid of it, you know. Yeah. I don't like the idea).

* * *

Видеозапись Абелевской лекции Денниса Салливана, с которой он выступил в Университете Осло (Норвегия) 25 мая 2022:

`https://www.youtube.com/watch?v=RRMBRiyNcjI`

Благодарности

Интервьюер выражает признательность Виктору Клепцыну, Андрею Коняеву и изданию $N+1$ за помощь с подготовкой вопросов, Виктору Васильеву, Владлену Тиморину и Михаилу Цфасману — за ценные советы по редактированию перевода. Автор благодарит Антона Зорича, Александра Шеня, Норвежскую академию наук и литературы и Международную федерацию научных журналистов (WFSJ) за финансовую и организационную помощь в поездке в Осло.

Беседу вела Наталия Демина

Московский центр непрерывного математического образования выражает благодарность Н. Деминой за интервью, предоставленные для 31-го и 32-го выпусков «Математического просвещения».