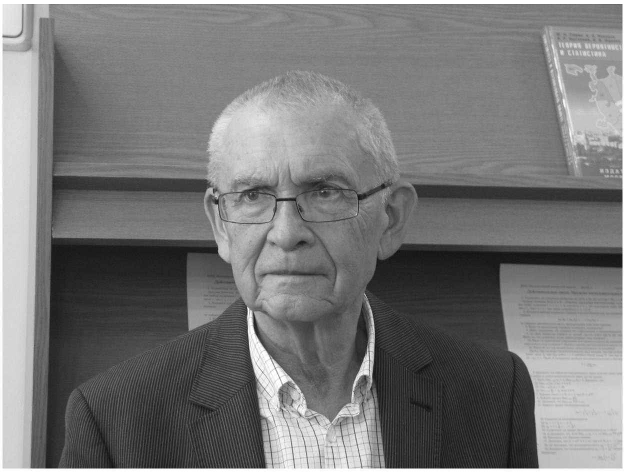
Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. I

Г. Б. Шабат



§ 0. Введение

7 января 2023 года ушёл из жизни Юрий Иванович Манин.

Закончилась жизнь великого математика, опубликовавшего 19-летним студентом в 1956 году свою первую работу [Манин1956] «О сравнениях третьей степени по простому модулю» и через 67 лет после этого сдавшего в «Известия РАН» статью [Manin2023] «Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach», которая выйдет в 2023 году, после смерти её автора. За этот более чем полувековой период Юрий Иванович (далее обычно Ю. И.) опубликовал сотни замечательных, безоговорочно принятых сообществом (ср. хотя бы *связность Гаусса — Манина*) математических работ, и не только арифметико-геометрических (как первая и последняя), но на разнообразнейшие темы: дифференциальные уравнения, кодирование и многие другие. Неотделимы

Вторая часть статьи публикуется в следующем выпуске.

от этих работ публикации по физике, иногда написанные Ю. И. в соавторстве с физиками, а иногда самостоятельно; оценка важности этих работ для понимания фундаментальных законов природы, видимо, принадлежит будущему.

Закончилась жизнь выдающегося мыслителя, с ранних лет интересовавшегося, видимо, ВСЕЙ культурой (со свойственной ему самоиронией Ю. И. называл этот интерес любовью с детства к *чтению обильному и беспорядочному*). Начиная с опубликованной в 1977 году в журнале «Природа» рецензии [Манин1977] «Человек и знак» на книгу Вяч. Вс. Иванова, заканчивающейся словами о *глубинном единстве гуманитарной и естественнонаучной культуры человечества*, Ю. И. публикует статьи о семиотике, лингвистике, психологии и т. п. Впрочем, в последние десятилетия некоторые статьи Ю. И. (в частности, написанные в соавторстве с Матильдой Марколли — математиком, физиком, лингвистом и писателем) представляют собой гармоничное соединение гуманитарных, естественнонаучных и математических результатов и идей.

Автор этих строк — безусловно ученик Ю. И., но не во вполне тривиальном смысле слова: мы оба — ученики великого математика Игоря Ростиславовича Шафаревича. Однако, когда в 1975 году Шафаревич за «антиобщественную деятельность» (защиту прав человека) был отстранён от научного руководства, я по совету Шафаревича попросил Ю. И. стать моим научным руководителем и в течение минутного телефонного разговора получил согласие. Руководство Ю. И. моей кандидатской диссертацией было формальным (только раз я рассказал ему её содержание), однако со студенческих лет я посещал замечательные спецкурсы и спецсеминары Ю. И., внимательно и восхищённо читал его статьи и книги. Всю свою взрослую жизнь я находился под его огромным профессиональным и человеческим влиянием — и в этом смысле, конечно, его ученик.

Запомнился разговор с Ю. И. в 1970-х, в набитом московском автобусе, в котором мы оба ехали на его семинар в МГУ. Прижатые друг к другу пассажирами, мы «обсуждали» (Ю. И. обладал удивительным умением разговаривать «на равных» со студентами и аспирантами) *недоказуемые истины*. Наши представления не вполне совпадали, моя точка зрения была чуть более оптимистична[1)], но менее точна.

[1)] Мой оптимизм был основан на не очень широко известной статье [F1962], о которой я узнал из курса логики [Манин1974], прочитанного для инженеров (!). В этой статье показано, что, хотя для любой *конечной* арифметической теории существуют недоказуемые истины, некоторыми *трансфинитными* процедурами их всё же можно обосновать.

Лишь узнав, что Ю. И. с нами больше нет, я осознал, что в течение нескольких десятилетий мысленно возвращался к этому разговору и всё надеялся свои эволюционирующие соображения обсудить с Ю. И. Откладывал, пока додумаю и запишу… Теперь не обсужу. И, уверен, мой пример незавершённого разговора — один из многих сотен.

Общение Ю. И. с учениками не сводилось к обсуждению математики. В его статье «Математика как профессия и призвание» (см. [Манин2008]) есть поразительные по искренности слова: *…после сорока лет преподавания почему-то оказывается, что ученики — это самая важная часть твоей жизни. Они становятся мудрее тебя (а ты, кажется, только стареешь), они женятся, разводятся и женятся снова, они присылают фотографии своих детей и домов…*

Эти слова, кажется, перекликаются с последними строками стихотворения, написанного Ю. И. в 2001 (!) году:

…У Рима, и мира, и рока
Я выучил смерти урок.
А жизнь убегает с урока,
Туда, где в ветвях ветерок.

Не забывая о возрасте своего учителя, я абсолютно не был готов к горестному известию, восхищался его неправдоподовной продуктивностью последних лет. Особым счастьем для меня было то, что в последние годы Ю. И. (совместно с Матильдой Марколли) обратился к основному предмету моих занятий — теории детских рисунков (см. [ММ2020]). Я написал ему письмо с некоторым математическим соображением и 22 февраля 2022 года получил ответ со словами:

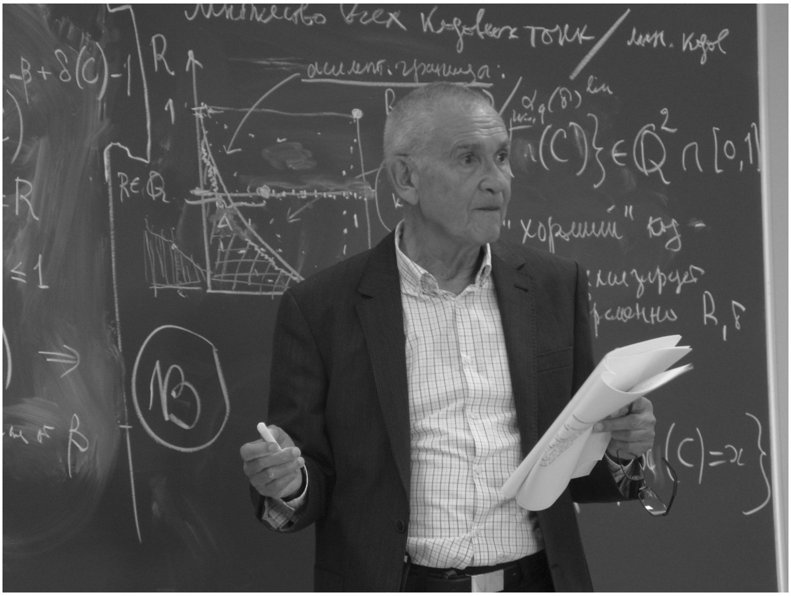
Я давно не думал на эту тему, так что ничего содержательного ПОКА сказать не могу.

Остаётся продолжать *мысленные* разговоры с Учителем.

§ 1. Краткий хронологический обзор работ Манина

Список Math-Net.Ru содержит 339 публикаций Ю. И. — как уже было сказано, с 1956 по 2023 годы, с юности до последнего вздоха.

Немногие математики XX и XXI веков могут сравниться с Маниным по широте охвата математических и других тем. Но в отличие, скажем, от Давида Гильберта, профессиональная жизнь которого была разбита на периоды (см. [С2019]) от *теории инвариантов* (1885–1893) до *оснований математики* (1922–1939), Ю. И., как правило, не покидал заинтересовавших его областей математики и других наук. Поэтому



тематика списка его работ в хронологическом порядке постоянно расширяется, и ниже мы укажем (иногда в очень приблизительных терминах) разделы наук, отражённые в работах. Обычно будут упоминаться лишь первые публикации по каждому из упоминаемых разделов.

1956–1968. Алгебраическая геометрия и теория чисел. Ю. И. работает как математик московской школы, основанной его (и, как было отмечено выше, автора настоящих строк) учителем И. Р. Шафаревичем (см. [КШ2017]). Об особо выдающихся работах этого периода: «Алгебраические кривые» [Манин1958] (именно в этой работе появилась *связность Гаусса — Манина*) и «Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями» [Манин1963] мы поговорим ниже.

1969–1975. Расширение тематики. Продолжая работать как алгебраический геометр — и, в частности, получив совместно с В. А. Исковских сенсационный результат [ИМ971], который будет прокомментирован ниже, Ю. И. начинает публиковать работы по более широкому кругу вопросов. Проявляется его исключительная общематематическая эрудиция[2)], и в сборнике [ПГ1969] он пишет комментарии к 11-й, 12-й, 14-й, 15-й и 17-й проблемам. В этот же период появляются

[2)] Он никогда не был *только* алгебраическм геометром. В более поздних воспоминаниях [Манин2008] Ю. И. с особой искренностью рассказывает о становлении своих отроческих отношений с математикой — например, обзоры «Десятая проблема Гильберта [Манин1973]» и «Проблема континуума» [Манин1973], а также написанная для широкой публики статья «Теорема Гёделя» [Манин1975а]. Следует отметить, что в текстах Ю. И. по математической логике его интересуют не только стандартные понятия и результаты[3] (которые он мастерски излагает в стиле, более приближённом к «обычной» математике, чем в учебниках, написанных логиками, — это даже отражено в названии), но и нетривиальные, часто обнаруженные самим Ю. И., связи с арифметикой и широким спектром гуманитарных проблем.

Тематика работ Ю. И. по «основной» специальности в рассматриваемый период тоже существенно расширилась, и теперь в неё вошла группа (Кремоны) бирациональных преобразований плоскости, дзета-функции модулярных кривых, p-адические автоморфные формы и p-адические группы Шоттки. Эти работы в настоящей статье мы комментировать не будем.

1976. Работа по дифференциальным уравнениям. После того, как в XIX-м веке было осознано, что возникшие из естественных наук дифференциальные уравнения, как правило, «решить» нельзя, и начали развиваться методы их *качественного* исследования, в 1960-е годы возродилась идея точных и явных решений, в частности, так называемых *вполне интегрируемых* (как классических конечномерных, так и бесконечномерных) систем. Активная работа в этом направлении велась и в России, в том числе В. Е. Захаровым[4] и моим братом, А. Б. Шабатом (см., например, [ЗШ1973]). От брата я не без удивления узнал, что Ю. И. интересуется этими вопросами: при поверхностном взгляде они кажутся такими далёкими от алгебраической геометрии и теории чисел. Однако Ю. И. одним из первых увидел в полной мере эти связи и опубликовал важную совместную работу [ГМШ1976], а в дальнейшем и другие, о которых мы ещё поговорим.

1977–1979. Гуманитарные проблемы. Уже упоминалась рецензия [Манин1977], с которой начались публикации Ю. И. по различ-

как он, обидевшись на учебник анализа за непонятное ε–δ определение непрерывности, закопал его в саду, но, когда пошёл дождь, устыдился и побежал выкапывать. Там же Ю. И. рассказывает о своих, наоборот, прекрасных отношениях с теорией множеств.

[3] Упомянутый выше учебник [Манин1974] для инженеров, будучи существенно расширен и переведён Н. Коблицем [Manin1977a], превратился в широко известный шедевр мировой логической литературы.

[4] Как мы знаем из [Манин2008], они дружили с Ю. И. — среди прочего общались как молодые математики, пишущие стихи.

ным гуманитарным вопросам. Они собраны в [Манин2008], и о некоторых из них мы поговорим.

1980. Физика. Эта наука привлекала Ю. И. всю его жизнь. Как он рассказывал, сразу после защиты кандидатской диссертации в 1961 году он пытался поступить на первый курс физфака МГУ, но не был допущен к экзаменам по каким-то формальным причинам; в утешение он купил огромный справочник по элементарным частицам и изумлялся необъятности накопленного в нём экспериментального материала. Первая из многих публикаций о физике — совместная [HM1980]. Работы Ю. И. по физике будут кратко прокомментированы.

1981. Информатика[5]. Ю. И. выделялся из математиков своего поколения огромным интересом к компьютерам настоящего и будущего. Первая публикация — [Manin1981] «Expanding constructive universes». Мы обсудим некоторые мысли Ю. И. о конструктивной математике.

1982–1983. Суперматематика. В 1970–80-е годы в разных сообществах, в том числе московских, наблюдалось увлечение математикой, в которой коммутативность заменялась на *суперкоммутативность* — правила перестановочности *чётных* и *нечётных* элементов, позаимствованные из внешней алгебры; эти идеи были тесно связаны с физикой и получили звучное название *суперматематика*. Ю. И. внёс заметный вклад в развитие этих идей, написав статью [Манин1982] «Замечания об алгебраических супермногообразиях». С более широких общематематических позиций эти идеи изложены в статье [Манин1984] «Новые размерности в геометрии»; к сожалению, объём настоящей работы не позволяет их обсудить.

1984–1990. Кодирование. Это — первая область, в которой алгебраическая геометрия над полями допускает практические приложения. Первая работа Ю. И. в этой области — совместная [BM1984]. Мы это направление обсуждать не будем (см. [Tsf2023]).

1991–1994. Некоммутативная алгебраическая геометрия. Начиная с работы [Manin1991], Ю. И. регулярно возвращался к этой теме. Его знаменитое введение в (тогдашнюю) <u>современную</u> алгебраическую геометрию [Манин1970][6], сразу ставшее библиографической редкостью, было переиздано [Манин2012] и дополнено разделом именно о *некоммутативной* алгебраической геометрии. Речь

[5] Более адекватным было бы английское наименование этой дисциплины Computer Science.

[6] Оно было дополнено книгой [Манин1971].

идёт не просто от отказе от коммутативности основного кольца, а[7] о выходе за пределы коммутативной математики, соответствующем физическому понятию *квантования* — например, замене равенства $ab-ba=0$ на $ab-ba=\hbar c$, где $\hbar$ — *постоянная Планка*. Подобно тому как в физике при $\hbar \to 0$ квантовая механика должна превращаться в классическую, в некоммутативной алгебраической геометрии обнуление $\hbar=0$ должно возвращать в обычную, коммутативную алгебраическую геометрию. Квантование и в физике, и в математике — творческий процесс, и мы немного поговорим о наиболее смелых идеях Ю. И. в этом направлении.

1991–1994. Квантовые группы. Это понятие доставляет пример удачного квантования; оно было придумано В. Г. Дринфельдом, одним из наиболее известных учеников Ю. И. Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin1991a]. Мы далее обсуждать эту тему не будем.

1995–1999. Математика над $\mathbb{F}_1$. Этот своеобразный раздел математики начал развиваться с 1950-х годов, когда возникла идея интерпретировать группы перестановок S_n как матричные группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_1)$ над (несуществующим) «полем» из одного элемента. Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin1995]. В ней обсуждается несколько гипотетический *абсолютный мотив Тейта* $\mathbb{T}$, скромно входящий в разложение чуть-чуть модифицированной дзета-функции Римана в произведение по нулям и полюсам[8]

$$Z(\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}, s) := (2\pi)^{-s/2}\cdot\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \frac{\prod_\rho \dfrac{s-\rho}{2\pi}}{\dfrac{s}{2\pi}\cdot\dfrac{s-1}{2\pi}}.$$

В эту формулу мотив Тейта невинно входит в виде $\mathrm{Z}(\mathbb{T}, s) := \dfrac{s-1}{2\pi}$; его интерпретация как представителя «поля» $\mathbb{F}_1$ связана с разложением дзета-функции Римана в *эйлерово произведение*, см. ниже.

2000–2008. Квантовые вычисления. Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin2000]. Помимо обычного для этой области сочетания

[7] Ю. И. часто пользовался выражением *небанальное обобщение*.

[8] Дзета-функция Римана, определяемая формулой $\zeta(s) := \sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ при $\mathrm{Re}(s)>1$ и мероморфно продолжаемая на всю комплексную плоскость, имеет единственный полюс в $s=1$ и нули. Эти нули подразделяются на *тривиальные* $s=-2,-4,-6,\ldots$ и *нетривиальные*, обычно обозначаемые $\rho\in\mathbb{C}$. Знаменитая *гипотеза Римана* (на 2023 одна из шести оставшихся *проблем миллениума*) состоит в том, что все нетривиальные нули лежат на прямой $\mathrm{Re}(\rho)=1/2$.

теории алгоритмов и квантовой механики, Ю. И. высказывает гипотетические соображения о работе мозга; результаты о росте рекурсивных функций в терминах колмогоровской сложности также, видимо, оригинальны. К сожалению, нам не удастся обсудить ни эту, ни последующие статьи Ю. И., посвящённые его общим взглядам на вычисления.

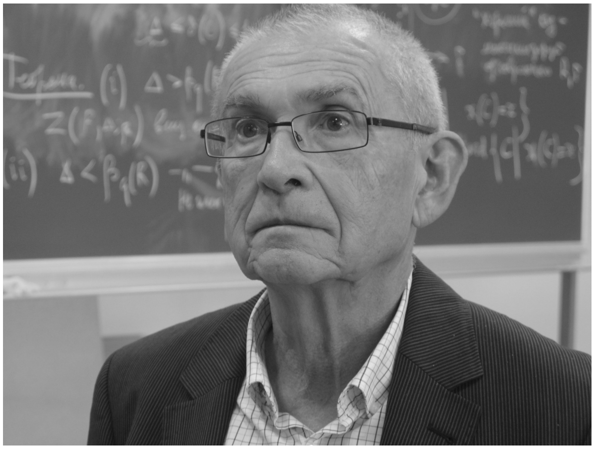
2009–2013. Обработка сигналов. В этой области Ю. И. опубликовал, видимо, единственную работу [LM2009]. Она поразительна с точки зрения диапазона намеченных Ю. И. приложений современной математики к чистым и прикладным областям различных наук. Ю. И. внёс в работу новейшие разделы математики, вроде квантования абелевых многообразий и квантовых тета-функций, его соавтор — видимо, более традиционные разделы. Эта работа далее комментироваться не будет.

2014. Применения колмогоровской сложности. Колмогоровская сложность была определена в работе [K1965] для определения *случайности* на алгоритмической основе. Ю. И. интерпретировал это понятие чрезвычайно широко; так, работу [Манин2014] он посвятил памяти И. М. Гельфанда, распространившего в работе (с соавторами) 1966 года физический *принцип наименьшего действия* на функционирование нервной системы. Непосредственной же целью этой работы было предъявление математической модели, объясняющей один хорошо известный эмпирический закон, связанный с убыванием частот (например, букв в естественном языке).

Ниже мы обсудим некоторые соображения Ю. И. (как опубликованные, так и высказанные в частных разговорах) о колмогоровской сложности в математике и вне её.

2015–2019. Нейронные коды. Работа [Manin2015] очевидно относится к междисциплинарным исследованиям будущего: трудно представить себе человека, помимо Ю. И. (и, возможно, нескольких его поздних соавторов), свободно оперирующих понятиями нейробиологии, сложности алгоритмов, гомотопической топологии, алгебро-геометрическими кодами и идеями унивалентных оснований математики. Мы этот круг идей обсуждать не будем.

2020–2023. Абсолютная группа Галуа и физика. В работе Манина и Марколли [MM2020] абсолютная группа Галуа $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$ была рассмотрена с различных точек зрения. Ниже мы бегло коснёмся интерпретации этой группы с точки зрения квантовой статистической механики и более подробно поговорим о её действии на *детских*



рисунках — некотором классе графов, вложенных в компактные ориентированные поверхности.

§ 2. О некоторых математических работах Манина

2.0. Попытка общего обзора

Математическое наследие Ю. И. необозримо. Уже были упомянуты впечатляющие количественные показатели — 339 публикаций за 67 лет. Вряд ли возможно каким-то разумным образом упорядочить эти публикации — как уже говорилось, для Ю. И. характерен не стиль профессиональной жизни Гильберта или А. Вейля, методически переходящих от одной тематики к другой[9], а, скорее, Лейбница или Гельфанда, развивавших многие идеи параллельно. Хронологическое упорядочивание работ Ю. И. может создать впечатление хаотичности их тематик, и это впечатление отчасти оправданно.

Во-первых, как видно из предыдущего раздела, для Ю. И., начиная с 1970-х годов, характерно регулярное переключение с одной тематики на другую. Так, Ю. И., основываясь на собственном опыте, советовал автору настоящей работы, если задача не решается, *на какое-то время* отложить работу над ней и заняться *чем-нибудь* другим. (Но размышлений ни над одной проблемой Ю. И. не оставлял навсегда, и его

[9] Цитата из работы Г. Вейля [B1989]: *Гильберт сам помог автору настоящего обзора увидеть, что его работы довольно строго делятся на различные периоды, в каждый из которых он был всецело поглощён проблемами из одной конкретной области. Если он занимался интегральными уравнениями, то они означали для него всё; бросив какой-либо предмет, он отделывался от него полностью и переходил к другому.*

наследие содержит огромный материал для математиков будущего — от конкретных вопросов, на которые он не успел ответить, до идей построения теорий).

Во-вторых, многие идеи Ю. И. воплощались в текстах, написанных в соавторстве, и появление этих текстов зависело от различных обстоятельств жизни соавторов. Приведу характерный — не очень широко известный, но близкий мне — пример. Дима Каневский, мой друг, одноклассник и однокурсник, был студентом и аспирантом Ю. И. и защитил кандидатскую диссертацию по кубическим поверхностям в конце 1970-х годов. Затем он покинул Россию и (будучи глухонемым почти от рождения) стал одним из наиболее известных мировых специалистов по конструированию устройств распознавания речи. Могло показаться, что он расстался с чистой математикой, став выдающимся специалистом по математике прикладной; однако примерно через два десятилетия после защиты диссертации он устроил себе «отпуск» от основных занятий и провёл некоторое время в институте Макса Планка, общаясь со своим учителем. В результате появилась работа [KM2001] «Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces».

В-третьих и, по существу, «в-главных», большинство работ Ю. И., начиная с [Манин1958] об алгебраических кривых над полями с дифференцированием, основаны на нетривиальных, иногда доступных только ему, аналогиях и связях. Импульсы к углублению понимания этих аналогий и связей (иногда — получаемые извне, при знакомстве с идеями и работами коллег, иногда — по более таинственным внутренним причинам) вряд ли могут быть систематизированы.

* * *

То, что и первая, и последняя работы Ю. И. относятся к арифметической геометрии, конечно, имеет важный символический смысл, но не должно вводить в заблуждение. Только тщательный анализ планов, которыми Ю. И. щедро делился с окружающими, и начатых текстов, покажет, что ещё Ю. И. сделал бы[10], если бы его дни были продлены. Нет сомнения, что в этих ненаписанных работах царило бы такое же (кажущееся хаосом) разнообразие идей, как и в завершённых при жизни работах.

[10] Меня особо занимает выделенное заглавными буквами ПОКА из цитированного выше последнего письма Ю. И. мне. Это — фрагмент словосочетания *пока не думал* о связях теории детских рисунков Гротендика с другими разделами математики и физики, уже существующими или которым только предстоит быть созданными.

Приводимый ниже обзор некоторых из опубликованных результатов Ю. И. ни в коей мере не претендует и не может претендовать на полноту. Вопреки высказанным соображениям о неструктурируемости материала, мы всё же очень условно разделим рассматриваемые работы на три класса (разумеется, с не очень чёткими границами).

- Получение новых результатов в готовых теориях.
- Участие в развитии создающихся теорий.
- Предугадывание теорий будущего.

Будут (по необходимости кратко) обсуждены работы всех трёх классов.

2.1. Работы в готовых теориях

Мы поговорим о сравнительно ранних работах Ю. И., в которых он выступал как *московский* математик — прежде всего, как представитель школы И. Р. Шафаревича (см. ссылку выше) и, несколько неожиданно, — заинтересовавшись дифференциальными уравнениями. Впрочем, алгебро-геометрические работы Ю. И., о которых пойдёт речь, способствовали несомненному признанию его как математика мирового уровня.

2.1.0. Алгебраическая геометрия: теоремы конечности

В школе И. Р. Шафаревича большое внимание уделялось восходящей к XIX веку аналогии между полями алгебраических чисел и полями рациональных функций над фиксированной кривой, см., например, [КШ2017]. Одно из главных достижений арифметической геометрии второй половины XX века — доказательство в [F1983] сформулированной в [M1922] *гипотезы Морделла* о том, что *на кривой рода, большего* 1, *над полем рациональных чисел имеется лишь конечное число рациональных точек*. Важную роль в доказательстве гипотезы сыграл И. Р. Шафаревич и его ученики, см. [КШ2017]. Доказательству сформулированной *числовой* гипотезы Морделла предшествовало полученное в [Манин1958] и [Манин1963] доказательство её *функционального аналога*, относящегося к алгебраической геометрии над *алгебраически замкнутым* полем: *не изотривиальное*[11] *семейство кривых рода, большего* 1, *имеет лишь конечное множество сечений*.

В работе [Манин1958] появилась *связность Гаусса — Манина*, имеющая огромное самостоятельное значение. Ограничимся кратким обсуждением этого объекта над полем комплексных чисел.

[11] То есть не становящееся тривиальным ни при какой замене базы, или, что то же самое, с не изоморфными слоями.

Пусть $\pi\colon \mathbf{X}\to\mathbf{B}$ — гладкое семейство кривых рода $g\geqslant 2$, над $\mathbb{C}$; это означает, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{X}$ — гладкие алгебраические многообразия над $\mathbb{C}$, π — морфизм таких многообразий, и для любой точки $\mathbf{b}\in\mathbf{B}$ *слой* $\mathbf{X}_{\mathbf{b}} := \pi^{-1\circ}(\mathbf{b})$ — гладкая полная кривая рода g над $\mathbb{C}$. В этих предположениях семейство $\pi\colon \mathbf{X}\to\mathbf{B}$ — локально тривиальное расслоение *в категории гладких многообразий* (но в неизотривиальном случае — не в категории комплексных). Поэтому (ко)гомологии достаточно близких слоёв не просто изоморфны (это следует из попарной гомеоморфности слоёв), а *канонически* изоморфны: выделенные изоморфизмы $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}},\mathbb{C})\cong\mathrm{H}^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}'},\mathbb{C})$ определены для достаточно близких $\mathbf{b},\mathbf{b}'$ локальной тривиализацией. Это означает, что на векторном расслоении над $\mathbf{B}$, слоем которого над точкой $\mathbf{b}\in\mathbf{B}$ является $2g$-мерное пространство $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}},\mathbb{C})$, определена *связность*, горизонтальные сечения относительно которой и реализуют упомянутые канонические изоморфизмы. Эта связность и названа *связностью Гаусса — Манина*[12]. в работе [K1968].

В случае кривых когомологии могут быть определены в чисто алгебраических терминах, как когомологии де Рама с привлечением дифференциалов *второго рода* (т. е. мероморфных дифференциалов без полюсов 1-го порядка); поэтому и связность Гаусса — Манина определяется в алгебраических терминах, как *уравнение Пикара — Фукса* на базе $\mathbf{B}$. Уточним сформулированные утверждения в простейшем случае $g=1$, близко следуя тексту самого Ю. И. из статьи [Манин1963].

Пусть семейство $\mathbf{X}$ задано уравнением $y^2z = x(x-z)(x-tz)$ в произведении $\mathbf{B}\times\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$, где $t\in\mathbf{B}=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, а $(x:y:z)$ — однородные координаты в проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$. Поверхность $\mathbf{X}$ превращается в *семейство кривых* введением морфизма $\pi\colon\mathbf{X}\to\mathbf{B}\colon(t,x:y:z)\mapsto t$; выбросив в каждом слое «бесконечную» точку $(0:1:0)$, запишем наше семейство в более привычном *лежандровом* виде

$$y^2 = x(x-1)(x-t).$$

Введём дифференциал $\omega := \dfrac{\mathrm{d}x}{y}$, голоморфный на каждой кривой $\mathbf{X}_t$. Если $\gamma(t)\in\mathrm{Z}_1(\mathbf{X}_t)$ — непрерывное семейство циклов при параметре $t\in U\subset\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, меняющемся в *односвязной* области U, то функция

$$\eta(t) := \int\limits_{\gamma(t)}\omega$$

голоморфна на U. Такие функции склеиваются в *многозначную* аналитическую функцию на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, но эта многозначность снимается

[12] Со ссылкой на работу [G1962], в которой этот термин применяется неявно.

применением *дифференциального оператора Гаусса*

$$4t(t-1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 4(1-2t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1.$$

Последнее утверждение является следствием чисто алгебраического соотношения

$$\left(4t(t-1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + 4(1-2t)\frac{\partial}{\partial t} - 1\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\mathrm{d}\frac{y}{(x-t)^2}$$

Вообще, исходный вклад Ю. И. в развитие этих классических понятий и результатов в работах [Манин1958] и [Манин1963] — их алгебраизация и творческое обобщение. Для самого Ю. И. этот вклад служил первым шагом к доказательству аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями[13)] в статье [Манин1963]; её влияние на доказательство исходной, «числовой» гипотезы Морделла (как уже было сказано, полученное в [F1983] при широком использовании работ математиков школы И. Р. Шафаревича) несомненно. Но и независимо от этого основного применения работа [Манин1963] стала широко известна и вызвала поток исследований на стыке алгебраической геометрии и теории алгебраических дифференциальных уравнений.

2.1.1. Алгебраическая геометрия: проблема Люрота

Не очень широко известный математик Якоб Люрот доказал в работе [L1876] не очень трудную теорему об алгебраических кривых.

Рациональная кривая может накрыть лишь рациональную кривую. Иначе говоря, если $\Bbbk$ *— произвольное поле, а поле* $\mathscr{K}$ *— промежуточное между* $\Bbbk$ *и* $\Bbbk(t)$*, т. е.* $\Bbbk \subset \mathscr{K} \subset \Bbbk(t)$*, причём* $\mathscr{K} \neq \Bbbk$*, то* $\mathscr{K} \simeq \Bbbk(t)$.

Доказательство легко выводится из формулы Римана — Гурвица.

Неприводимое алгебраическое многообразие любой размерности $\mathbf{X}$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ называется *унирациональным*, если при некотором $n \geqslant \dim \mathbf{X}$ существует *доминантное* (т. е. имеющее всюду плотный образ) рациональное отображение

$$f\colon \mathbf{P}_n(\Bbbk) \dashrightarrow \mathbf{X}.$$

Очевидно, любое рациональное многообразие унирационально. *Проблемой Люрота* в данной размерности называется вопрос о том, верно

13) В работе [C1990] была замечена и исправлена неточность доказательства в статье [Манин1963] — в формулировке из [L1990] недоставало некоторого *функционального аналога теоремы Зигеля о целых точках.*

ли в этой размерности обратное утверждение — *каждое унирациональное многообразие рационально*. Как указано выше, в размерности 1 проблема Люрота решается положительно, и это — лёгкий результат.

В размерности 2 проблема Люрота также решается положительно, но это связано уже с достаточно серьёзной алгебраической геометрией. Далее мы в основном следуем работе [B2016].

В конце XIX века геометры работали в основном над полем $\mathbb{C}$. Итак, пусть $\mathbf{S}$ — проективная поверхность, снабжённая рациональным отображением $f\colon \mathbf{P}_2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbf{S}$. Поскольку f не определено лишь на конечном множестве, дифференциалы ω различных типов на $\mathbf{S}$ определяют дифференциалы $f^*\omega$ тех же типов на $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ и, согласно *критерию Кастельнуово* (см., например, [ИШ1989]), поверхность $\mathbf{S}$ оказывается рациональной.

Размерность 3 оказалась значительно сложнее. Здесь (а, следовательно, и в высших размерностях) ответ на проблему Люрота оказывается отрицательным, но на её окончательное решение потребовалось примерно полвека. Поразительно, что наряду с контрпримером, построенным Ю. И. совместно с В. А. Исковских в работе [ИМ971], ещё двумя парами математиков мирового уровня в работах [AM1972] и [CG1972] практически одновременно были построены ещё два контрпримера. Все три контрпримера — разные, и нерациональность соответствующих трёхмерных многообразий была установлена разными методами.

Работа над построением контрпримеров восходит к статье [E1912], в которой рассматривалось (общее) пересечение квадрики и кубики в $\mathbf{P}_5(\mathbb{k})$. Унирациональность этого многообразия была установлена правильно, но при попытке доказательства его нерациональности использовалась ссылка на работу [F1908]. Однако, несмотря на (сохраняющуюся по сегодняшний день) важность идей и результатов Фано, это работа была признана ошибочной, и проблема оставалась открытой.

Полностью обоснованные контрпримеры появились лишь в упомянутых работах 1970-х годов. В работе [CG1972] устанавливается нерациональность кубических гиперповерхностей в $\mathbf{P}_4(\mathbb{k})$; при этом используется интереснейший инвариант — *промежуточный якобиан*, являющийся 3-мерным аналогом классического якобиана. В работе [AM1972] рассматриваются двулистные накрытия $\mathbf{P}_3(\mathbb{k})$, разветвлённые вдоль особых гиперповерхностей степени 4; кручение в 3-мерных когомологиях отличает их от рациональных многообразий. Наконец, в статье [ИМ971] изучаются гладкие гиперповерхности степени 4 и устанавливается, что группы их бирациональных автоморфизмов конечны, в отличие от огромных групп бирациональных автоморфизмов рациональных многообразий. Унирациональность некоторых квартик была известна, см. [S1960]. Вопрос о том, все ли 3-мерные квартики унирациональны, был поставлен в статье [ИМ971], но ответ, по-видимому, неизвестен по сей день.

Работа Ю. И. [ИМ971] была последней по «чистой» алгебраической геометрии, но к *арифметике* многообразий, близких к рациональным, он возвращался не раз, см., например, [Manin1993].

2.1.2. Дифференциальные уравнения

На первом этапе работы в области дифференциальных уравнений Ю. И. занимался *алгебраизацией классических конструкций*. О принёсшей ему мировую известность работе по алгебраической геометрии *над полями с дифференцированием* мы уже говорили; к ней примыкает работа [Manin1965] «Moduli fuchsiani»[14], в которой теория линейных дифференциальных уравнений (перекрывающая известные к тому времени теории Пикара — Вессио и Колчина) строится чисто алгебраически и нацелена на алгебро-геометрические применения в духе [Манин1963].

В дальнейшем связанные с дифференциальными уравнениями работы писались Ю. И., как правило, в соавторстве. Исключение составляют

• большой обзор [Манин1978], показывающий широту, глубину и своеобразие понимания предмета Юрием Ивановичем;

• статья [Манин1978a], в которой известные к тому времени связи между нелинейными дифференциальными уравнениями распространяются на особые кривые, причём отмечается, что вырождения решений лучше анализируются на алгебро-геометрическом языке, чем на языке тета-функций (это нетривиально, поскольку классически изучение дифференциального уравнения считалось исчерпанным, когда оно решено в известных спецфункциях);

• стоящая несколько особняком работа [Manin1998], в которой, среди прочего, переоткрыта компактная запись (громоздкого в своей исходной форме) уравнения Пенлеве-6 в терминах эллиптических функций, найденная Р. Фуксом в 1907 году.

В нескольких работах по дифференциальным уравнениям Юрия Ивановича с соавторами, видимо, существенную роль играет вклад

[14] Единственная (не считая кратких заметок для итальянской энциклопедии) работа Ю. И., написанная по-итальянски.

Ю. И. как алгебраиста, В работе [ГМШ1976] формализовано вариационное исчисление, в работе [ЛМ1980] вводится *формальный спектральный параметр* для приведения известного *уравнения длинных волн* к формально лаксову виду $L_t = [L, P]$, и т. д.

Возможно, ещё более существен вклад Ю. И. в теорию дифференциальных уравнений не только как алгебраиста, но как Геометра[15] — не просто специалиста по алгебраической геометрии, овладевшего дифференциальной геометрией, а математика с исключительно широким взглядом на множества с «геометрическими» структурами: топологическими, инфинитезимальными и другими. Уже упоминалась (как *физическая*) работа [HM1980], в которой геометрическая конструкция *твисторов Пенроуза* применялась к фундаментальным уравнениям математической физики. В знаменитых работах [ADHM1978] и [DM1978] алгебраическая геометрия применялась к конструкции *инстантонов*. Общие принципы, которым Ю. И. следовал в своих работах в этой области, сформулированы им в текстах, которые мы обсудим ниже в разделе, посвящённом отношениям Ю. И. с физикой.

Наконец, Ю. И. участвовал в написании двух работ, связанных с дифференциальными уравнениями и далеко выходящих за пределы этой классической науки. В работе P. B. Cohen, Ю. И. и D. Zagier[16] [CMZ1997] построены несколько экзотические обобщения классической теории автоморфных форм — точнее, связанных с ними дифференциальных операторов; теория распространяется на *псевдодифференциальные операторы*, ведущие себя «обобщённо-автоморфно» под действием модулярной группы, и, кроме того, строится *суперизация* получающейся теории. В оставшемся неопубликованным препринте [BM2013] вводятся и изучаются уравнения типа Пенлеве-6 с p-адическим «временем».

Ю. И. не оставил после себя школу специалистов по дифференциальным уравнениям, и многие его работы в этой области остались незавершёнными. Автор настоящих строк убеждён, что внимательное прочтение цитированных и других работ Ю. И. о дифференциальных уравнениях вместе с продумыванием его общих идей в этой области окажется полезным.

---

[15] Именно с заглавной буквы; так в XIX веке называли выдающихся математиков.

[16] Посвящённой, видимо по предложению Ю. И., памяти Иры Дорфман. Ирина Яковлевна Дорфман (1948–1994) — талантливый математик, специалист по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям, умерла от тяжёлой болезни в возрасте 46 лет.

2.2. Развитие создающихся теорий

Ю. И. был весьма общительным человеком. Он не только щедро делился своими идеями на любой стадии законченности, но и был исключительно восприимчив к чужим, доступным в докладах, частных беседах, письмах, статьях. Особый интерес у него вызывали новые — ещё не очень распространившиеся, но глубокие — теории, он охотно и легко подключался к их развитию и распространению. Приведём примеры.

2.2.0. Мотивы Гротендика

В статье [Manin2014] Ю. И. пишет о своей командировке во Францию в 1967 году. Там Гротендик в частном порядке рассказывал ему о своём новом проекте — гипотетической *теории мотивов*, которая была призвана обобщить уже многие развитые к тому времени *теории когомологий* алгебраических многообразий. Контуры будущей теории уже угадывались, она должна была функториально сопоставлять *мотив* (?) объекту алгебро-геометрической категории. В этой категории объекты — схемы Гротендика или их обобщения, а вместо традиционных морфизмов $X \to Y$ рассматриваются *соответствия*, т. е. *циклы* в $X \times Y$. За прошедшие десятилетия были построены довольно многочисленные фрагменты общей теории мотивов; однако соединение их в полную теорию, предугаданную Гротендиком, тормозится тем, что *стандартные гипотезы* о циклах, сформулированные в [G1969], несмотря на существенный прогресс, остаются в целом открытыми (см., например, частичный обзор в [M2020]).

Статья [Manin2014] замечательна и с чисто литературной, и с математической точек зрения; взгляды Гротендика на математику, которые Ю. И. продумывал и усваивал, описаны иногда неформально, но в основном понятно и точно. Формально вклад Ю. И. в развитие теории мотивов заключается в том, что некоторые следствия из неё он в работе [Манин1968] доказал непосредственно. По существу же огромный вклад Ю. И. в российскую математику, контакты которой с мировой были тогда ограничены, заключался в том, что он привёз в Россию идеи актуальной современной теории, воспринятые из первоисточника, и показал коллегам и ученикам, что в этой теории можно работать.

2.2.1. Некоммутативная алгебраическая геометрия

Как уже было сказано, работа Ю. И. в этой области началась с работы [Manin1991]. Затем были другие работы, из которых сейчас упомянем одну, [Manin2002]. В ней решается на первый взгляд неразрешимая задача: распространить классическую теорию[17], связывающую мнимые квадратичные поля с эллиптическими кривыми (в которой, например, полю гауссовых чисел $\mathbb{Q}([\mathrm{i}])$ соотносится кривая $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]}$) на случай вещественных квадратичных полей — например, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, — которым сопоставляется что-то загадочное.

Оказывается, эллиптическая кривая может быть заменена на *двумерный квантовый тор*, соответствующий вещественной квадратичной иррациональности. Ю. И., опираясь на некоторые просчитанные примеры, аналогии и ссылки на довольно многочисленные современные работы, предлагает строить квантовые понятия, соответствующие вещественному квадратичному полю $\mathbb{K}$, на основе алгебр функций на множестве $\frac{\mathbf{P}_1(\mathbb{K})}{\mathsf{PGL}_2(\mathbb{Z})}$. Мы вернёмся к этой конструкции, когда будем обсуждать её физические аспекты, введённые в работе [MM2002].

В статье [Manin2002] также обсуждаются *эллиптические кривые как некоммутативные пространства*. Для этого используется очевидный изоморфизм

$$\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{C}^{\times}}{q^{\mathbb{Z}}},$$

где $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ и $q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$. В такой интерпретации обычная эллиптическая кривая является *q-деформацией* невозможного случая $q = 1$, а квантованная функциональная алгебра имеет вид $\mathbb{C}[z, z^{-1}][v, v^{-1}]$ с соотношением $vz = qzv$.

2.2.2. Математика над $\mathbb{F}_1$

Этот раздел математики часто считается несерьёзным; в ходу обозначение F_{un}, которое по-английски может читаться как *Fun*, а по-французски как $\mathbb{F}_1$. Есть много способов обосновать занятия этой странной наукой; один из наиболее понятных заключается в том, чтобы конечные поля $\mathbb{F}_q$ объявить *q-деформациями* несуществующего[18] поля $\mathbb{F}_1$. Несмотря на несуществование поля $\mathbb{F}_1$, вводится аналог категории

---

[17] *Jugendtraum* Кронекера, его *мечту юности*. Иронический подзаголовок обсуждаемой статьи — *ein Alterstraum* [мечта старости]; Ф. Хирцебрух предложил перевести его как *кризис среднего возраста*.

[18] В предыдущем подразделе эллиптическая кривая *обессмысливалась* (что, с точки зрения специалистов, аналогично переходу от квантовой механики к классической, в других обозначениях $\hbar \to 0$) при $q \to 1$, где $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$. В этом же подразделе q — степень простого числа, и обсуждается обессмысливание при $q := 1$.

конечномерных пространств над $\mathbb{F}_1$, и это — категория конечных множеств. Аналогия не бессмысленна: оказывается, например, что количества точек в грассманианах над конечным полем задаются q-аналогом биномиальных коэффициентов:

$$\#\,\mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{F}_q) = \binom{n}{k}_q$$

— правая часть выражается, как для обычных биномиальных коэффициентов, через *q-факториалы*, где $[m]_q! := [1]_q[2]_q \ldots [m]_q$, а $[r]_q :=$ $:= 1 + q + q^2 + \ldots q^{r-1}$.

Упомянутая выше работа [Manin1995] начинается с обсуждения проблемы *абсолютных мотивов*, которую мы слегка затронули выше. С общематематической точки зрения работа посвящена *проблеме сходства чисел и функций*, которая тоже уже упоминалась. Многочисленные аналогии восходят к XIX веку, но в точные формулировки они не превращаются. Очевидный пробел — разрыв между пониманием алгебраической геометрии над конечными полями и над кольцами целых алгебраических чисел; очевидный признак этого — разрыв в понимании соответствующих дзета-функций. Ю. И. предлагает $\mathbb{F}_1$-интерпретации аналитических функций, фигурирующих в теории дзета-функции Римана — например,

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{-1} := \sqrt{2}\Big(\pi^{-s/2} \cdot \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big)^{-1} =: \zeta(\mathbf{P}^*_\infty(\mathbb{F}_1)).$$

Ю. И. выражает надежду на то, что эта формула (которая, согласно гипотезам Бейлинсона[19], даёт арифметическую информацию о значениях дзета-функций Дедекинда в целых точках) с помощью подходящего расширения мотивов Тейта получит $\mathbb{F}_1$-аналог, с помощью которого вычисляются ранги *стабильных гомотопических групп*.

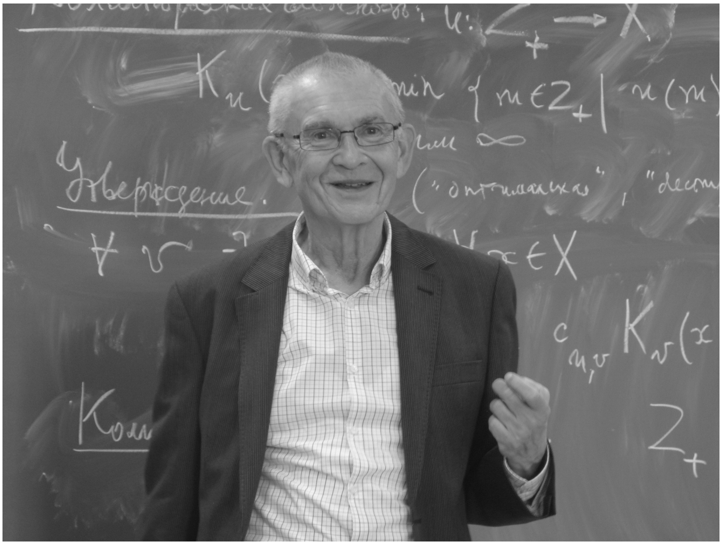
Объём настоящей статьи не позволяет даже на таком поверхностном уровне прокомментировать другие определения, результаты и проблемы этой замечательно содержательной работы.

Работа [Manin2009] основана на идеях, довольно сложных технически. Ограничимся перечислением областей математики, в которых Ю. И. видит связи с «аналитической геометрией» над $\mathbb{F}_1$.

- Корни из единицы и диффеоморфизмы Морса — Смейла.
- Корни из единицы и инварианты Виттена — Решетихина — Тураева[20].

[19] Александр Бейлинсон — один из знаменитых учеников Ю. И.

[20] Трёхмерных гомологических сфер.



- Корни из единицы и системы Боста — Конна[21].
- Векторы Витта.

* * *

Приведённые формулировки удручающе поверхностны и разрозненны. Возможно, это не случайно — математика, бывшая когда-то цельным организмом, начиная с XIX века распадается на удаляющиеся друг от друга дисциплины. Однако многие математики стремятся к восстановлению её единства, и Ю. И. сыграл в реализации этого стремления огромную роль. Лишь будущее покажет, насколько основательны надежды на сближение далёких разделов (например, функционального анализа и арифметики) на основе такого странного объекта, как $\mathbb{F}_1$. Более систематические изложения теории можно найти в [CCM2008], [D2008], [H2017].

2.3. Предугадывание теорий будущего

Очень важными были работы Ю. И., которые никак не укладывались в существующие теории — ни классические, ни современные. Они относились к математике будущего, часто нося междисциплинарный характер. В последние десятилетия Ю. И. написал их довольно много, а в некоторых случаях успел поделиться своими идеями только в устной форме. Рассмотрим несколько примеров.

[21] Касаются алгебр Гекке и допускают термодинамическую интерпретацию.

2.3.0. Конструктивная математика

В 1970-е годы Ю. И. вёл семинар по *рекурсивной геометрии*. Не знаю, остались ли от этого семинара какие-нибудь материальные следы; участников было много, как на всех семинарах Ю. И., но каких-либо публикаций мне не известно. Приведу, однако, несколько запомнившихся тем исследований, которые и сейчас представляются мне перспективными.

- Построить *пучок рекурсивных и частично-рекурсивных функций* на разрешимых и перечислимых подмножествах в $\mathbb{N}^n$. Рассматривать его как обобщение традиционных пучков в диофантовой геометрии; осознав невозможность построения аналога топологии Зариского, придумать ей замену.
- Построить теорию *роста* общерекурсивных, примитивно-рекурсивных функций; за образец взять комплексно-аналитическую теорию — *порядок* и *тип* целой функции.
- Изучить, основываясь на работе [K1962], группы рекурсивных автоморфизмов рекурсивных подмножеств в $\mathbb{N}^n$. Построить теорию представлений этой группы.
- Изложить на рекурсивно-геометрическом языке решение Матиясевичем 10-й проблемы Гильберта над $\mathbb{Z}$. Постараться распространить его на $\mathbb{Q}$.

2.3.1. Применения колмогоровской сложности

Выше упоминалась работа [Манин2014], в которой были заложены основы естественнонаучных применений колмогоровской сложности; очевидны перспективы этого подхода к геномике. Упомянем два направления её применения в математике, которые были намечены Ю. И. устно.

• *Глубина математического результата*. Предложенный качественный признак глубины — короткая формулировка и длинное доказательство; Ю. И. приводил пример теоремы Бёрнсайда о чётности порядка некоммутативной простой конечной группы. Эта идея наталкивается на два возражения: во-первых, длина доказательства зависит от языка, а во-вторых, возможна ситуация, в которой короткое доказательство существует, но (в данный момент?) неизвестно. Оба возражения преодолеваются общими свойствами колмогоровской сложности. Она определена лишь с точностью до аддитивной константы и, будучи рассмотрена на бесконечном множестве с такой точностью, от языка уже не зависит. Кроме того, колмогоровская сложность — уже привязанная к языку — определена точно, как настоящая функция, но алгоритмически не вычислима именно по указанной причине: современные математики не могут быть уверены, что краткое доказательство теоремы Бёрнсайда никогда не будет найдено. Но объективно определённая предложенная мера глубины предложена!

• *Сложность и высота.* Возможно, Ю. И. первый обратил внимание на сходство этих понятий (многие специалисты XX века по арифметической геометрии вводили понятие высоты и владели им, но лишь небольшая их часть, подобно Ю. И., настолько интересовалась понятиями из далёких разделов математики, что владела понятием сложности)[22]. Между тем, три сходства бросаются в глаза:

(1) и сложность, и высота обычно определены с точностью до аддитивной постоянной, т. е. имеют содержательный смысл не столько для индивидуального объекта, сколько для класса объектов;
(2) и сложность, и высота объекта связаны с *количеством информации*, необходимой для определения объекта;
(3) в большинстве «хороших» теорий количество (с точностью до изоморфизма) объектов ограниченной сложности и высоты конечно[23].

Эти понятия, однако, не могут совпадать, поскольку высота алгоритмически вычислима, а сложность — нет.

Мне посчастливилось обсуждать с Ю. И. два аспекта соотношения сложности и высоты.

Первый безусловно относится к математике будущего и вряд ли может быть естественно определён на языке понятий современной математики:

Насколько (*статистически*) *типично отклонение сложности от высоты*? Иначе говоря — как часто объект (натуральное число или что-то более хитрое арифметико-геометрическое) допускает скрытое от поверхностного взгляда краткое определение?

Второй аспект связан с конкретными объектами, которые мы обсудим в следующем подразделе.

Пусть имеются две эквивалентные категории, объекты которых описываются конечными количествами информации. Есть ли осно-

[22] Говоря неформально, сложность — это длина кратчайшего описания объекта на данном формальном языке, а высота характеризует сложность его построения. Точное определение можно найти, например, в статье [Манин1975a].

[23] Количество объектов сложности, не превышающей h, как функция от h, иногда определённая с точностью до аддитивной константы, — важнейшая характеристика теории.

вания надеяться, что высоты будут эффективно оцениваться друг через друга?[24)]

Ю. И. несколько неожиданно для меня высказал сомнение, а через некоторое время я эти сомнения подтвердил (см. [Sh2016]).

2.3.2. Визуализация абсолютной группы Галуа

Выше уже упоминалась работа [Manin2014], в которой Ю. И. рассказывал об общении с Гротендиком в 1967 году, об идеях и стиле мышлении Гротендика, которые захватили его и повлияли на его дальнейшую работу. Через несколько лет после этого Гротендик (по нематематическим причинам) почти полностью разорвал связи с математическим сообществом, но продолжал активную работу — в одиночестве и совместно со студентами университета его юности Монпелье, багаж знаний которых был несравненно беднее, чем у его учеников и соавторов, с которыми он работал в предыдущий период. Гротендику пришлось выбрать непривычную для него тематику, в которой можно было бы работать, опираясь только на интуицию, и он предложил своим студентам заняться такими вложениями $\mathbf{X}_1 \hookrightarrow \mathbf{X}_2$ графов в компактные ориентированные поверхности, что дополнения $\mathbf{X}_2 \setminus \mathbf{X}_1$ гомеоморфны несвязным объединениям дисков. Эти объекты рассматривались и раньше, о чём Гротендик не знал; но он дал им красивое название *dessins d'enfants* (детские рисунки), которое через некоторое время прижилось в математической литературе.

Уйти от своей основной тематики Гротендику не удалось: Пьер Делинь, отношения с которым всё-таки сохранялись, рассказал ему о работе (ученика И. Р. Шафаревича) Геннадия Белого [Б1979], в которой было показано, что *на комплексной кривой $\mathbf{X}_{\mathbb{C}}$ существует рациональная функция*[25)] *β всего с тремя критическими значениями, когда кривая $\mathbf{X}_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией кривой $\mathbf{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, определённой над полем алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$.* Связь этой удивительной теоремы с теорией детских рисунков не очевидна, но Гротендик сразу понял, что если критические значения функции β суть $\{0, 1, \infty\}$, то, взяв за $\mathbf{X}_2$ топологическую модель кривой $\mathbf{X}_{\mathbb{C}}$, а за граф $\mathbf{X}_1$ — прообраз $\beta^{-1\circ}[0, 1]$ отрезка, соединяющего два критических значения, мы получим детский рисунок![26)]

[24)] Ответ тривиальным образом утвердителен, если сложность осуществления эквивалентности равномерно ограничена. Однако бывают случаи, когда она растёт вместе с высотой.

[25)] Обозначение в честь Белого, введённое в работе [ShV1990].

[26)] Буквально это верно при дополнительном предположении *чистоты* функции β, заключающейся в *двукратности* всех значений $\beta = 1$. Это ограни-

Это соответствие устанавливает эквивалентность подходящим образом определённых категорий детских рисунков и *пар Белого* $(\mathbf{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \beta)$; одно из ярких применений этой эквивалентности — *визуализация* абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$, которая оказывается действующей на множестве (классов изоморфизма) детских рисунков, причём на сферических деревьях или на торических рисунках уже точно.

Гротендик подытожил свои идеи в этой области в неформальной, но ставшей широко известной рукописи [G1984], опубликованной лишь 13 лет спустя. Это рукопись достигла Москвы, и Ю. И. относился к ней весьма благосклонно; в частности, его совет мне, выбирающему тему дальнейших занятий после защиты кандидатской диссертации (написанной совсем на другую тему), заняться уточнением и развитием идей из [G1984], оказался решающим для моей дальнейшей профессиональной жизни. Статья [ShV1990], в которой часть неформальных соображений Гротендика излагалась в традиционной математической форме, была настоятельно рекомендована Ю. И. в сборник, посвящённый 60-летию Гротендика.

Однако сам Ю. И. обратился к этой тематике много позже, в одной из своих последних работ [MM2020]. В этой работе детские рисунки связывают квантовую статистическую механику с поразительным количеством разделов математики: алгебры Гекке, функциональный анализ, теория полей классов, алгебры Хопфа, комбинаторика, алгебры Рота — Бакстера… Что касается самих детских рисунков и действия абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$ на них, найдены совершенно новые подходы: все (включая несвязные) детские рисунки порождают некоторую алгебру Хопфа, и это позволяет вместе с каждым рисунком рассмотреть результаты стягивания и удаления всех его рёбер.

В работе утверждается, что этот подход даст новые инварианты Галуа, и это — несомненно элементы науки будущего: в теории детских рисунков (отчасти в соответствии с мечтами Гротендика) применяется продвинутая физическая интуиция, связанная с таким количеством математических понятий, что вряд ли многие современные математики ими владеют. Остаётся надеяться, что эти идеи Ю. И. будут развиты его коллегами и учениками.

чение, однако, не принципиально, поскольку от любой функции Белого β можно перейти к чистой $4\beta(1-\beta)$.

Список литературы

[Манин1956] *Манин Ю. И.* О сравнениях третьей степени по простому модулю // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1956. Т. 20, вып. 5. С. 673–678.

[Манин1958] *Манин Ю. И.* Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 737–756.

[Манин1963] *Манин Ю. И.* Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152. С. 1061–1063.

[Manin1965] *Manin Yu. I.* Moduli fuchsiani // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3). 1965. Vol. 19. P. 113–126.

[Манин1968] *Манин Ю. И.* Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Матем. сб. 1968. Т. 119, № 4. С. 475–507.

[Манин1970] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. I: Аффинные схемы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.

[Манин1971] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. Часть II: K-функтор в алгебраической геометрии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.

[Манин1971a] *Манин Ю. И.* Добавление переводчика к книге: Д. Мамфорд. Абелевы многообразия. М.: Мир. 1971. С. 286–292.

[ИМ971] *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 1(9). С. 140–166.

[Манин1973] *Манин Ю. И.* Десятая проблема Гильберта // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1973. С. 5–37.

[Манин1974] *Манин Ю. И.* Лекции о математической логике. М.: Московский институт инженеров электронного машиностроения, 1974.

[Манин1975] *Манин Ю. И.* Проблема континуума // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 5, М.: ВИНИТИ, 1975. С. 5–72.

[Манин1975a] *Манин Ю. И.* Теорема Гёделя // Природа, 1975. № 12. С. 80–87.

[ГМШ1976] *Манин Ю. И.* Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 30–34.

[Манин1977] *Манин Ю. И.* Человек и знак // Природа. 1977. № 5. С. 150–152.

[Manin1977a] *Manin Yu. I.* A course in mathematical logic for mathematicians / Second edition. New York: Springer, 2010. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 53).

[ADHM1978] *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I.* Construction of instantons // Phys. Lett. A. 1978. Vol. 65, № 3. P. 185–187.

[DM1978] *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I.* A description of instantons // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 63, № 2. P. 177–192.

[Манин1978] *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–152.

[Манин1978a] *Манин Ю. И.* Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 4. С. 53–63.

[HM1980] *Henkin G. M., Manin Yu. I.* Twistor description of classical Yang — Mills — Dirac fields // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 95, № 3–4. P. 40–408.

[ЛМ1980] *Лебедев Д. Р., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн Бенни II. Представление Лакса и законы сохранения // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Т. 12. Л.: Наука, 1980. (Зап. научн. сем. ЛОМИ; Т. 96). С. 169–178.

[Manin1981] *Manin Yu. I.* Expanding constructive universes // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). С. 255–260.

[Манин1982] *Манин Ю. И.* Замечания об алгебраических супермногообразиях // Алгебра. Сб. работ, посвящённых 90-летию О. Ю. Шмидта. М.: МГУ, 1982. С. 95–101.

[ВМ1984] *Влэдуц С. Г., Манин Ю. И.* Линейные коды и модулярные кривые // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 25, М.: ВИНИТИ, 1984. С. 209–257.

[Манин1984] *Манин Ю. И.* Новые размерности в геометрии // УМН. 1984. Т. 39, вып. 6(240). С. 47–73.

[Manin1986] *Manin Yu. I.* Theta-function representation of the partition function of a Polyakov string // Pis'ma Zh. Eksp. Teor Fiz. 1986. Vol. 43, № 4. P. 161–163.

[BM1986] *Beilinson A. A., Manin Yu. I.* The Mumford Form and the Polyakov Measure in String Theory // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 107, № 3. P. 359–376.

[KM1986] *Kapranov M. M., Manin Yu. I.* The twistor transformation and algebraic-geometric constructions of solutions of the equations of field theory // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 5. P. 33–61.

[Manin1987] *Manin Yu. I.* Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293–303.

[Manin1991] *Manin Yu. I.* Topics in noncommutative geometry // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). P. 255–260.

[Manin1991a] *Manin Yu. I.* Quantum groups // Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk. 1991. Vol. 100, № 5. P. 55–68.

[Manin1993] *Manin Yu. I.* Notes on the arithmetic of Fano threefolds // Compositio Math. 1993. Vol. 85, № 1. P. 37–55.

[KM1994] *Kontsevich M., Manin Yu.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 164, № 3. P. 525–562.

[Manin1995] *Manin Yu. I.* Gromov — Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). 1995. Astérisque. № 228. P. 121–163.

[CMZ1997] *Cohen P. B., Manin Yu., Zagier D.* Automorphic pseudodifferential operators // Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Vol. 26. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1997. P. 17–47.

[KM1997] *Кобзарев В. Ю., Манин Ю. И.* Элементарные частицы. М.: Фазис, 1997.

[Manin1998] *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Geometry of differential equations. Providence, RI: AMS, 1998. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 186). P. 131–151.

[Manin2000] *Manin Yu. I.* Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm // Séminaire Bourbaki. Vol. 1998/99. Astérisque. 2000. № 266. Exp. No. 862. P. 375–404.

[KM2001] *Kanevsky D., Manin Yu.* Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces // Rational points on algebraic varieties. Basel: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math.; Vol. 199). P. 199–219.

[Manin2002] *Manin Yu. I.* Real multiplication and noncomutative geometry // Selecta Math. (N. S.). 2002. Vol. 8, № 3. P. 475–521.

[MM2002] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry. arXiv:math/0202109v1 [math.AG], 12 Feb 2002.

[Манин2003] *Манин Ю. И.* Некоммутативная геометрия и квантовые тета-функции // Глобус. Записки математического семинара МНУ. 2004. Т. 1. С. 91–108.

[Манин2008] *Манин Ю. И.* Математика как Метафора. М.: МЦНМО, 2008.

[Manin2009] *Manin Yu. I.* Cyclotomy and analytic geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv: 0809.1564v2 [math.AG].

[Manin2009a] *Manin Yu. I.* Renormalization and computation I: motivation and background. arXiv:0904.4921v2 [math.QA].

[MM2011] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Error-correcting codes and phase transitions // Math. Comput. Sci. 2011. Vol. 5, № 2. P. 133–170.

[LM2009] *Luef F., Manin Yu. I.* Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces // Lett. Math. Phys. 2009. Vol. 88, № 1–3. P. 131–161.

[Манин2012] *Манин Ю. И.* Введение в теорию схем и квантовые группы. М.: МЦНМО, 2012.

[BM2013] *Buium A., Manin Yu. I.* Arithmetic differential equations of Painlevé VI type. arXiv:1307.3841v2 [math.NT], 18 Dec 2013.

[Манин2014] *Манин Ю. И.* Закон Ципфа и вероятностные распределения Левина // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, вып. 2. С. 51–66.

[Manin2014] *Manin Yu. I.* Forgotten motives: the varieties of scientific experience // ICCM Not. 2014. Vol. 2, № 1. P. 6–10.

[MM2014] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Big Bang, Blowup, and Modular Curves // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2014. Vol. 10. Paper 073. P. 20.

[Manin2015] *Manin Yu. I.* Neural codes and homotopy types: mathematical models of place field recognition // Mosc. Math. J. 2015. Vol. 15, № 4. P. 741–748.

[MM2020] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Quantum Statistical Mechanics of the Absolute Galois Group // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2020. Vol. 16. Paper 038. P. 52. arXiv:1907.13545.

[Manin2023] *Manin Yu. I.* Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach // Известия РАН. Сер. Матем. 2023. Т. 87, № 3 (в печати).

[AM1972] *Artin M., Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. Vol. 25. P. 75–95.

[B2016] *Beauville A.* The Lüroth problem // Rationality problems in algebraic geometry. Cham: Springer, 2016, (Lecture Notes in Math.; Vol. 2172). P. 1–27.

[CG1972] *Clemens H., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. (2). 1972. Vol. 95. P. 281–356.

[C1990] *Coleman R.* Manin's proof of the Mordell conjecture over function fields // Enseignement Mathematique. 1990. Vol. 36. P. 393–427.

[COGP1991] *Candelas P., de la Ossa X., Green P., Parkes L* A pair of Calabi — Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. B. 1991. Vol. 359, № 1. P. 21–74.

[CCM2008] *Connes A., Consani C., Marcolli M.* Fun with $\mathbf{F}_1$. arXiv:0806.2401v1 [math.AG].

[DKE1999] *Deligne P., Kazhdan D., Etingof P. et al.* Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians (2 Volume Set). AMS, 1999.

[D2008] *Durov N.* New Approach to Arakelov Geometry. arXiv:0704.2030v1 [math.AG].

[E1912] *Enriques F.* Sopra una involuzione non razionale dello spazio // Rend. Acc. Lincei (5a). 1912. Vol. 21. P. 81–83.

[F1983] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.

[F1908] *Fano G.* Sopra alcune variet'a algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti R. Acc. Sci. Torino. 1908. Vol. 43. P. 973–984.

[F1962] *Feferman S.* Transfinite recursive progressions of axiomatic theories // J. Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 3. P. 259–316.

[G1962] *Grothendieck A.* On the DeRham Gohomology of Algebraic Varieties // Publ. Math. IHES. 1966. Vol. 29.

[G1969] *Grothendieck A.* Standard Conjectures on Algebraic Cycles // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. (Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.; Vol. 4). P. 193–199.

[G1984] *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme // Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242). P. 5–48. With an English translation on pp. 243–283.

[GP2013] *Gurzadyan V. G., Penrose R.* On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky // Eur. Phys. J. 2013. Vol. 128. Article 22.

[H2017] *Haran S.* Geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv:1709.05831v1 [math.AG], 18 Sep 2017.

[HK2022] *D'Hoker E., Kaidi J.* Lectures on modular forms and strings. arXiv:2208.07242v2 [hep-th], 18 Nov 2022.

[K1968] *Katz N. M.* On the differential equations satisfied by period matrices // Publications mathématiques de l'IHÉS. 1968. Vol. 35. P. 71–106.

[K1962] *Kent C. F.* Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104. P. 347–362.

[L1990] *Lang S.* Mordell's review, Siegel's Ietter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics // Notices Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 42, № 3. P. 339–350.

[L1876] *Lüroth J.* Beweis eines Satzes über rationale Curven // Math. Ann. 1876. Bd. 9. S. 163–165.

[M2023] *Marcolli M.* Pierced by a sun ray. Preprint 2023.

[M2020] *Milne J. S.* Grothendieck's standard conjecture of Lefschetz type over finite fields. arXiv:2011.06563v1 [math.AG].

[M1922] *Mordell L. J.* On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1922. Vol. 21. P. 179–192.

[S1960] *Segre B.* Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. Mat. Pura ed Appl. (4). 1960. Vol. 50. P. 149–186.

[Sh2016] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 446. С. 182–220.

[Sh2016a] *Shabat G.* On the elliptic time in the adelic gravity // Facta universitatis. Ser. Physics, Chemistry and Technology. 2016. Vol. 14, № 3. Special issue. P. 307–319.

[ShV1990] *Shabat G. B., Voevodsky V. A.* Drawing Curves Over Number Fields // *Cartier P., Illusie L., Katz N. M., Laumon G., Manin Y. I., Ribet K. A.* (eds.) The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics. Vol 88. Boston, MA: Birkhäuser, 1990.

[Tsf2023] *Tsfasman M.* To appear in the Notices of AMS.

[Б1979] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43, вып. 2. С. 267–276.

[В1989] *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество. М.: Наука, 1989.

[ВШ1989] *Воеводский В. А., Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над числовыми полями // ДАН СССР. 1989. Т. 39, № 1. С. 38–41.

[Д1984] *Дридзе Т. М.* Текстовая деятельность в структуре социальной коммуникации. М.: Наука, 1984.

[ЗШ1973] *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // ЖЭТФ. 1973. Т. 64, № 5. С. 1627–1639.

[ИШ1989] *Исковских В. А., Шафаревич И. Р.* Алгебраические поверхности // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фунд. направ. Т. 35. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 131–263.

[КШ2017] *Куликов Вик. С., Шабат Г. Б.* Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 22. М.: МЦНМО, 2017. С. 35–61.

[К1965] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1, № 1. С. 3–11.

[ПГ1969] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

[С1989] *Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание и лексико-статистика // Лингвистическая реконструкция и древнейшая история Востока. М.: Наука, 1989. С. 3–39.

[С2019] *Стюарт И.* Давид Гильберт. М.: Альпина нон-фикшн, 2019.

Георгий Борисович Шабат, Российский государственный гуманитарный университет, Москва

george.shabat@gmail.com