Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы‘).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 6, с. 148–149) опубликована

Задача 3.8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (*Д. Любшин*)

С такой конструкцией связан следующий сюжет.

Задача 3.8$'$. *Дан пятиугольник $ABCDEF$ площади S. Докажите неравенство*

$$S \leqslant S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle EFA} + S_{\triangle FAB}.$$

В продолжение темы:

Задача 3.8$''$. *В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P'. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам P, вычли площадь P'; получилось число N. Совершив те же операции с пятиугольником P', получили число N'. Докажите, что $N > N'$.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 6 (с. 135, см. решение: выпуск 7, с. 195–196) опубликована

Задача 5.2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг? (*А. Я. Белов*)

Естественно возникает следующий вопрос.

Задача 5.2$'$ (на исследование). *Оцените число операций в задаче* 5.2, *в частности когда число куч равно* k, *общее количество песка равно единице и при этом Али-Баба может взять любые* $k-1$ *куч и уйти, а разбойнику следует оставить не больше* ε *песка.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

Этот сюжет имеет приложение к теории колец с тождествами (*PI*-теории).

Задача 5.2$''$. *Пусть в ассоциативной алгебре выполняется полиномиальное тождество степени* n:

$$x_1 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_n \setminus \mathrm{Id}} \alpha_\sigma x_\sigma(1) \dots x_\sigma(n).$$

Тогда в ней выполняется некоторое нетривиальное тождество алгебраичности порядка n

$$\sum_{I=(i_1,\dots,i_n)} c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \dots c_n = 0.$$ (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229–230) опубликована

Задача 7.4. Доказать неравенство $x^y + y^x > 1$ $(x, y > 0)$.

(*Фольклор*)

Вот связанный сюжет.

Задача 7.4$'$. *Докажите неравенство* $2^x + 2^{1/x} > 1$. (*Фольклор*)

В выпуске 8 (с. 247, см. исправления и решение: наст. выпуск, с. 222–225) опубликована

Задача 8.7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p\,dx < 1;$$

$$p > 1,\ k = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor \quad \text{или} \quad p = 1,\ k = 0, \ldots, n+1,$$

влекут условие $|f(0)| < C$. (*А. Я. Канель*)

Естественно возникает

Задача 8.7′. *Верно ли, что для $p, n \in \mathbb{N}$ из неравенств*

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1;$$

$k = 0, \ldots, np + p + 1$ *при* $p > 1$ *и* $k = 0, \ldots, n + 1$ *при* $p = 1$ *следует ограниченность* $|f(0)|$? (*А. С. Мингажев*)

В выпуске 9 (с. 223, см. решение: выпуск 14, с. 277) опубликована

Задача 9.5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (*Фольклор*)

Вот задача на связанный сюжет.

Задача 9.5′. Существует ли функция, дифференцируемая во всех рациональных точках и недифференцируемая во всех иррациональных? (*Фольклор*)

В выпуске 10 (с. 278, см. решение: выпуск 13, с. 185–186) опубликована

Задача 10.1. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа. (*А. К. Ковальджи*)

Вот контрапункт к этой задаче.

Задача 10.1′. (a) *В каждой вершине треугольника записано некоторое число, меньшее чем* 10^6*, причём сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется средним арифметическим чисел, стоящих в остальных вершинах, и эта операция повторяется* 30 *раз. Докажите, что после этого каждое число станет по модулю меньше чем* 10^{-3}.

(б) *По кругу расставлены n вещественных чисел, не все они равны. За секунду каждое число заменяется на среднее арифметическое со своим соседом по часовой стрелке. Докажите, что расположение чисел стремится к постоянному,*

(в) *причём это происходит* с экспоненциальной скоростью, *т. е. существует $0<\alpha<1$ такое, что на k-й секунде разности чисел имеют порядок $O(\alpha^k)$.*

(г) *Найдите это α.* (*Л. Радзивиловский*)

А вот общая формулировка.

Задача 10.1$''$. *В вершинах графа Γ написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяются одновременно). Операцию повторяют до бесконечности. При этом оказалось, что последовательности чисел, записанные в вершинах, не сходятся. Докажите, что граф Γ является* двудольным, *т. е. все его вершины можно раскрасить в два цвета так, что соседние вершины будут разноцветными.*
(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7$'$. Докажите, что
$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}. \qquad \text{(Фольклор)}$$

В выпуске 29 (с. 263) опубликована

Задача 11.7’$'$. Докажите, что
$$p\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k}=(p+r)^n. \qquad \text{(Фольклор)}$$

В продолжение темы:

Задача 11.7$'''$. *Среди $m+n$ пассажиров автобуса m человек имеют монету в* 5 *копеек, n человек —* 10 *копеек, у кассира есть k монет достоинством* 10 *копеек. Какова вероятность того, что все пассажиры смогут заплатить за проезд и очередь не будет приостанавливаться?*
(*Фольклор*)

В выпуске 14 (с. 272) опубликована

Задача 14.2. Найти предел:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}\sin(x)}{\arcsin\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}\arcsin(x)} \qquad \text{(В. И. Арнольд)}$$

В продолжение темы:

Задача 14.2$'$. *Пусть* $0<x<\frac{\pi}{2}$. *Что больше*: $\operatorname{tg}(\sin(x))$ *или* $\sin(\operatorname{tg}(x))$?

(*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i. Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите все 5 возможностей. (*А. Я. Канель-Белов*)

С ней связана (выпуск 29, с. 265)

Задача 17.7$'$ (на исследование). На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n-мерном пространстве взяли по точке A_i. Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье (три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным). Рассмотрите случай k-мерных граней. (*А. Я. Канель*)

В продолжение темы:

Задача 17.7$''$. (а) *Даны два правильных тетраэдра с рёбрами длины* $\sqrt{2}$, *переходящих один в другой при центральной симметрии. Пусть* Φ — *множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры* Φ.

(б) *В правильный додекаэдр можно вписать куб* 5 *разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть* Φ — *множество центров масс пятёрок точек, концы которых принадлежат попарно разным кубам. Найдите объём фигуры* Φ.

(в) *В правильный додекаэдр можно вписать правильный тетраэдр* 10 *разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть* Φ — *множество центров масс десяток точек, концы которых принадлежат попарно разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры* Φ.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 19 (с. 257) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2+y^2=(x+1)^3;$$
$$\text{б) } x^2+xy+2y^2=(y+1)^3$$

в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Развитием сюжета служит

Задача 19.3$'$. *Решите уравнение $x^2+xy+41y^2=(yz+1)^3$ в натуральных числах.* (*Н. Н. Осипов*)

В выпуске 20 (уточнение в выпуске 28, с. 236, см. решение: выпуск 30, с. 192–208) опубликована

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка k*, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство

$$b_0a_n + b_1a_{n-1} + \ldots + b_ka_{n-k} = 0.$$

Пусть $b_0 = 1$, $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что тогда либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий 2016 различных простых делителей, либо множество натуральных чисел разбивается на непересекающиеся арифметические прогрессии, на каждой из которых наша рекуррента является геометрической прогрессией.

(*А. Я. Канель-Белов*)

С ней связана

Задача 20.4$'$. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $a_1 < \ldots < a_s$ — целые числа.*

(а) *Докажите, что $P(a)$ делится на $P(a_1), \ldots, P(a_s)$ при некотором a.*

(б) *Можно ли утверждать, что $P(a)$ делится на $P(a_1)\ldots P(a_s)$ при некотором a?* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 22 (с. 232, см. решение: выпуск 23, с. 236–238) опубликована

Задача 22.4. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны. (*И. В. Митрофанов*)

Следующая задача относилась к определителям таких матриц (выпуск 28, с. 244–245).

Задача 22.4$'$. В матрице на пересечении i-й строки и j-го столбца при $i > j$ стоит переменная x_{ij}, при $i < j$ стоит $-x_{ij}$, а при $i = j$ стоит 0. Докажите, что её определитель есть квадрат многочлена от переменных x_{ij}. (*Теорема Пфаффа*)

В продолжение темы:

Задача 22.4$''$. *Докажите, что собственные числа кососимметрической матрицы чисто мнимые.* (*Фольклор*)

В этой связи в выпуске 28 на с. 258–259 приведена подборка задач на разностное дифференцирование. Вот и ещё задачи на эту тему.

1. *Найдите все такие функции f, что для любой тройки попарно различных вещественных чисел x, y, z выполняется неравенство*

$$\frac{f(x)}{(x-y)(x-z)}+\frac{f(y)}{(y-x)(y-z)}+\frac{f(z)}{(z-y)(z-x)}\geqslant 0.$$

2. *Рассмотрим множество всех троек (x, y, z) неотрицательных целых чисел, не превосходящих n, но исключим тройку $(0, 0, 0)$. Каким минимальным числом плоскостей, не проходящих через начало координат, можно покрыть это множество?*

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.5. (а) Дана полоса $2 \times n$, заполненная знаками «+» и «—». За одну операцию разрешается поменять знаки в одном столбце, строке или диагонали. Каково минимальное число операций, гарантированно достаточное для того, чтобы сделать все знаки плюсами?

(б) Тот же вопрос для полосы $3 \times n$. (*А. Я. Канель-Белов*)

В продолжение темы:

Задача 28.5′. (а) *Во всех клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «—». Разрешается поменять знаки в любом подквадрате 2×2 на противоположные. Какое максимальное число таблиц можно получить?*

(б) *Сколько операций для этого требуется?* (*Л. Радзивиловский*)

Замечание. На 33-м турнире Городов (2012 г., весна, сложный вариант, 8–9 кл.) была предложена задача.

Задача. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «—». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 30 (с. 230) опубликована

Задача 30.6. Дана выпуклая (т. е. такая, что множество точек над графиком выпукло) функция $f(x)$, определённая на всей вещественной прямой. Обозначим через U множество всех точек плоскости между графиками функций $f(x)$ и $f(x)+1$ (включая точки, лежащие на графиках). Докажите, что внутри U можно расположить отрезок любой конечной длины. (*Е. Рябов*)

В продолжение темы:

Задача 30.6$'$. (а) *По угловой речке — области между координатными осями*, горизонтальным и вертикальным лучами с началом в точке $(1, 1)$ — плывёт ветка. Каково максимально возможное расстояние между её концами, при котором она может проплыть всю область?

(б) *Открытый вопрос. Какова максимальная площадь фигуры, которая может в этой области развернуться на* 180°?

(*А. Я. Канель-Белов*)