

Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 193, см. решение: выпуск 6, с. 137–139) опубликована

Задача 1.1. Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля?
(Фольклор)

Развитием сюжета служит

Задача 1.1'. Имеется бесконечная клетчатая плоскость и хромая ладья на ней. (Ход хромой ладьи — в клетку, соседнюю по стороне.) Также имеется программа, которая выставляет между соседними по стороне клетками перегородки и к моменту времени t не может выставить больше чем $t \cdot c$ перегородок, где c — константа (то есть программа может и выставлять перегородки регулярно, и долгое время не ставить, но к моменту времени t должно быть выставлено не больше $t \cdot c$ перегородок). Программа написана заранее и не может реагировать на то, как будет ходить ладья. Более того, ладья знает программу и знает, когда и куда будут выставляться перегородки.

(а) Докажите, что при $c \leq 1$ ладья заведомо сможет ходить вечно.

(б) Докажите, что при $c > 2$ можно написать программу, которая поймает ладью, если программе известно изначальное местоположение ладьи.

(в) Решите пункт (б) без условия о том, что программе известно изначальное местоположение ладьи. (М. Матдинов, Ф. Ивлев)

ЗАМЕЧАНИЕ. Есть гипотеза, что при $c = 2$ (а значит, и при $c < 2$) ладья сможет ходить сколь угодно долго, даже если программе известно изначальное положение ладьи.

В выпуске 8 (с. 246, см. решение: выпуск 9, с. 215–217) опубликована

ЗАДАЧА 8.5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим

$$N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}.$$

При каких k найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \dots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?

(А. А. Заславский, А. В. Спивак)

С ней связана (выпуск 29, с. 263)

ЗАДАЧА 8.5'. Закрашены k вершин правильного n -угольника P . Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если $M1$ — множество m расположенных подряд вершин и $M2$ — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в $M1$ отличается от количества закрашенных вершин в $M2$ не больше, чем на 1. Доказать, что для любых натуральных n и k ($k < n$) почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.

(М. Л. Концевич)

В продолжение темы:

ЗАДАЧА 8.5''. (а) Опишите все бесконечные апериодические слова над алфавитом из k символов со следующим свойством: в любых двух под словах одинаковой длины количество символов каждого сорта отличается не более чем на 1.

(б) Опишите все бесконечные апериодические слова над алфавитом из k символов такие, что для некоторых C и N_0 при всех $n > N_0$ количество под слов длины n равно $n + C$.

(А. Я. Канель-Белов, А. Л. Чернятьев)

ЗАДАЧА 8.5'''. Пусть n — фиксированное число. Укажите все такие A , что числа $[A], [2A], \dots, [NA]$ все различны и $[1/A], [2/A], \dots, [N/A]$ тоже различны. (Фольклор)

В выпуске 11 опубликована (с. 163, см. решение: выпуск 14, с. 279)

ЗАДАЧА 11.6. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n . Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$? (Э. Туркевич)

Ответ отрицательный, и решение проходит при всех целых $k > 1$. В этой связи возникает

ЗАДАЧА 11.6'. (а) Пусть k — целое число, $k > 1$. Ограничена ли последовательность $s(n^k)/s(n)$?

(б) Решите уравнение в целых числах: $s(n^4) = s(n)^4$.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

ЗАДАЧА 13.12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: (а) 2^{n^2} ; (б) $2^{2^n 3^k}$.

(в) Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n} ($c \in A$) периодична, счётно, а множество $B \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n} ($c \in B$) периодична, несчётно. (А. Канель)

С ней связана (выпуск 29, с. 264)

ЗАДАЧА 13.12'. (а) Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Докажите, что множество дробных частей $\{\alpha \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено на единичном отрезке. (Фольклор)

(б) **ЛЕММА КРОНЕКЕРА.** Пусть α_i , $i = 1, \dots, k$, линейно независимы над \mathbb{Q} . Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{\alpha_1 \cdot n\}, \dots, \{\alpha_k \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено в единичном кубе.

ЛЕММА ВЕЙЛЯ. Пусть многочлены P_i , $i = 1, \dots, k$, линейно независимы над \mathbb{Q} по модулю многочленов с рациональными коэффициентами и констант. Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{P_1(n)\}, \dots, \{P_k(n)\}$, где $n \in \mathbb{N}$:

(в) всюду плотно;

(г) равномерно распределено в единичном кубе.

В одном из доказательств леммы Вейля используется следующая

ЗАДАЧА 13.12''. (а) В таблице $n \times n$ записаны числа $a_{ij} = b_i b_j$. Главная диагональ $((1, 1) - (n, n))$ покрыта неперекрывающимися квадратами равного размера, стороны которых параллельны сторонам таблицы, а главные диагонали лежат на главной диагонали большого квадрата. Может ли среднее арифметическое чисел, попавших в эти квадраты, быть строго больше среднего арифметического чисел таблицы?

(б) Тот же вопрос, если условие равенства размеров убрать.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 14 (с. 273, поправка: выпуск 15, с. 235, см. решение: выпуск 15, с. 219–228) опубликована

ЗАДАЧА 14.8. Дан треугольник ABC . A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон BC, AC, AB с вписанной окружностью соответственно. A_0, B_0, C_0 — середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых A_0B_0 и A_1B_1 через C' . Аналогично определяются точки A' и B' . Докажите, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в точке Фейербаха. (Ф. Ивлев)

По мотивам этой задачи придумалась следующая

ЗАДАЧА 14.8'. Докажите, что касательная к вписанной окружности треугольника в точке Фейербаха касается также вписанного эллипса Штейнера (касающегося сторон в их серединах).

(А. А. Заславский)

В выпуске 16 опубликована (с. 231)

ЗАДАЧА 16.7. В единичный шар вписано тело T , все рёбра которого имеют длину не более 10^{-3} , а площадь его поверхности больше 10^3 . Докажите, что у него не менее 10^9 граней. (А. Я. Белов)

Ей предшествовала классическая задача:

ЗАДАЧА 16.7'. В единичный шар вписано тело T . Может ли площадь его поверхности быть сколь угодно большой? («Сапог Шварца»)

В выпуске 20 опубликована (с. 251)

ЗАДАЧА 20.9. (а) Матрица A называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$, где A^* — матрица, транспонированная к матрице A . Какова максимальная размерность векторного подпространства комплексных $(n \times n)$ -матриц, все элементы которого нормальны?

(Международная студенческая олимпиада, 2015)

(б) Какова максимальная размерность подпространства попарно коммутирующих комплексных $(n \times n)$ -матриц? (Э. Б. Винберг)

В продолжение сюжета:

ЗАДАЧА 20.9'. Матрица A называется *идемпотентной* если $A^2 = A$. Дано k идемпотентных матриц A_1, \dots, A_k порядка n таких, что $A_iA_j = -A_jA_i$ при $i \neq j$. Докажите, что ранг одной из них не превосходит n/k . (Данила Белоусов, Новосибирск)

В выпуске 26 (с. 267) опубликована

ЗАДАЧА 26.8. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

и пусть C есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что C — треугольник или что C — четырёхугольник? (Ф. В. Петров)

В продолжение вероятностной темы:

ЗАДАЧА 26.8'. В круге случайно и равномерно выбрали n синих точек и k красных точек. Каково матожидание количества вершин пересечения выпуклой оболочки красных точек и выпуклой оболочки синих точек? (Число вершин пустого множества считается равным нулю.)
(Ф. В. Петров)

В выпускe 28 (с. 233, см. решение: этот выпуск, с. 239–240) опубликована

ЗАДАЧА 28.2. Любой ли трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником? (Фольклор)

Развитием темы служит

ЗАДАЧА 28.2'. Всегда ли возможно, перегнув произвольный треугольник по средним линиям, получить тетраэдр (не обязательно правильный)? (Фольклор)

В выпускe 29 (с. 258) опубликована

ЗАДАЧА 29.15. (а) Рассматривается последовательность первых цифр степеней двойки 1248136125 ... Каково количество различных подслов длины 13?

(б) Рассматривается последовательность W первых цифр вида 2^{n^2} : 1215636 ... Докажите, что существует такой многочлен $P(k)$, что для всех достаточно больших k количество всех различных подслов в W длины k есть в точности $P(k)$. (А. Я. Канель-Белов)

Продолжением темы служит

ЗАДАЧА 29.15'. Рассматривается последовательность W первых цифр степеней двойки 1248136125

(а) Докажите, что последовательность непериодична.

(б) Докажите, что существует такая константа N , что фрагмент 1248136125 встречается в любом подслоне из W длины N .

(в) Докажите, что любое подслоно из W , если его записать в обратном порядке, встречается как подслоно в последовательности первых цифр степеней пятёрки.

(г) Опишите слова, которые могут встречаться бесконечно много раз в последовательности первых цифр числа вида $c_1(c_2n)!$.

(А. Я. Канель-Белов)