

Григорий Маргулис: я старался работать
в разных областях математики
над трудными задачами



О своём пути в математику, о наиболее значимых результатах рассказывает Григорий Маргулис (1946), доктор физико-математических наук, научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН, профессор Йельского университета (США), лауреат Филдсовской премии (1978), премии Вольфа (2005) и премии Абеля (2020). Беседовала Наталия Демина.

Интервьюер благодарит Антона Зорича, Александра Шеня, Норвежскую академию наук и литературы и Международную федерацию научных журналистов (WFSJ) за финансовую и организационную помощь в поездке в Осло, а Григория Сойфера за неоценимую помощь в редактировании текста интервью.

Спасибо, что согласились на интервью. Я хотела бы прежде всего спросить Вас про Вашу учёбу в Московском государственном университете. Вашим научным руководителем был Яков Синай. Не расскажете о том, как Вам с ним работалось, каков стиль его научного руководства?

Когда я поступил в Московский университет в 1962 году, то, начиная с первого курса, на мехмате было огромное количество семинаров по самым разным областям математики. Я ходил на многие из них, в общем не особо понимая, на какие нужно ходить и на какие нет. И так продолжалось первые два года. Как вы знаете, мы тогда учились пять лет. Начиная с третьего года, были курсовые работы и потом на пятом курсе дипломная работа.

Я ходил на семинар Евгения Дынкина, на котором обсуждалась тематика границ Мартина и вокруг этого. И Евгений Борисович как-то спросил, какие положительные гармонические функции существуют на нильпотентных группах, и высказал предположение, что при некоторых условиях они должны быть постоянны на смежных классах по коммутанту. И я в какой-то момент это доказал, и это было моей первой научной работой. Она была представлена в ДАН СССР академиком А. Н. Колмогоровым, написана мной в 19 лет (в 1965 г.), а опубликована в 1966 г.¹⁾

Должен сказать, что на самом деле это не было таким уж беспрецедентным случаем, чтобы студент написал какую-то вполне серьёзную научную работу. Д. Каждан (1946 г.) тоже начал публиковаться очень рано. Одна из наиболее знаменитых его работ — про введённое им свойство (Т) — развилась в целую область математики. Он её написал в 20 лет. В августе 1966 года в Москве проходил Международный математический конгресс, и Каждан рассказал о своей работе Арману Борелю, очень известному швейцарскому математику. Этот результат был большой неожиданностью, никто его не предсказывал.

На третьем курсе моим научным руководителем чуть не стал Владимир Арнольд, но он как раз уехал во Францию на год, и мы с Яковом Синаем друг друга нашли, и я стал его учеником. Я начал ходить на его семинары.

Обычно руководитель подбирает задачу, и студент работает над ней. Но в моём случае я бы не сказал, что это было так. Благодаря тому, что я ходил на его семинар и разговаривал с ним, появилась работа, которая стала основой для моей кандидатской диссертации «О некоторых вопросах теории U -систем». Они были введены Д. В. Аносовым и ныне называются системы Аносова, а U — это по формулировке Аносова особые условия. Одним из основных результатов кандидат-

¹⁾ *Маргулис Г. А.* Положительные гармонические функции на нильпотентных группах // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 5. С. 1054–1057.

ской диссертации стала асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны.

Кроме того, была топологическая работа о фундаментальной группе компактных трёхмерных многообразий, на которых существует U -поток (поток Аносова).

Потом в 1967 году под Душанбе, столицей Таджикистана, в одном из домов отдыха проходила математическая школа (в основном по аналитической теории чисел). В ней участвовали многие математики. Мы с Д. Кажданом там обсуждали дискретные подгруппы групп Ли. Там мы начали доказывать и месяца через два завершили доказательство гипотезы Сельберга о существовании унипотентных элементов в неравномерных решётках полупростых групп Ли. В этой же работе мы дали оценку снизу объёма факторпространства G/Γ полупростой группы Ли G по дискретной подгруппе Γ . Этот результат стал широко известен. В частности, Арман Борель сделал о нём доклад на семинаре Бурбаки. Статья²⁾ была написана в 1967 году, а затем опубликована в «Математическом сборнике» (1968).. И стала сенсацией. Написана она была плохо, и у коллег были трудности с её пониманием. Но в принципе, когда люди заинтересованы понять, они могут «прорваться».

Как Вы находили и находите задачи, которые вам интересны?

Они как-то приходят... Я старался работать в разных областях математики над трудными задачами. Одной из таких задач была проблема арифметичности решёток в полупростых группах Ли. Здесь есть два случая: равномерные решётки и неравномерные решётки. Наша работа с Д. Кажданом стала отправной точкой в моём доказательстве арифметичности неравномерных решёток полупростых групп Ли. В этом доказательстве были некие утверждения, которые сами по себе, возможно, оказали бóльшее влияние на развитие математики, чем полученный окончательный результат. Отмечу, что если в случае неравномерных решёток я более-менее следовал предложенной А. Сельбергом и И. И. Пятецким-Шапиро³⁾ программе доказательства их арифметичности, то в случае равномерных решёток, когда дискретная подгруппа кокомпактна, никакого известного подхода не было.

²⁾ Каждан Д. А., Маргулис Г. А. Доказательство гипотезы Сельберга // Матем. сб. 1968. Т. 75(117), № 1. С. 163–168; Kazhdan D. A., Margulis G. A. A proof of Selberg's conjecture // Math. USSR-Sb. 1968. Vol. 4, № 1. P. 147–152.

³⁾ Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро (30 марта 1929 года, Москва — 21 февраля 2009 года, Тель-Авив) — советский, израильский и американский математик.

Так что пришлось использовать трансцендентные методы, что для многих математиков было совершенно неожиданно.

Как раз этот результат стал одним из тех, за которые Вам присудили премию Филдса, да?

Да, это так, при этом наибольшее впечатление произвело моё доказательство арифметичности равномерных решёток. Причина в том, что результат формулировался в алгебраических, арифметических, геометрических терминах, а моё доказательство существенно использует методы эргодической теории. Поясню подробнее: доказательство легко сводится к так называемой теореме супержёсткости. И опять же, с одной стороны, не было понятно, что он к этому сводится, а с другой, когда я это сделал, то это уже кажется весьма простым. Я доказал теорему супержёсткости, комбинируя методы теории алгебраических групп с методами эргодической теории. В то время, с точки зрения алгебраистов, эргодическая теория была совершенно чужда теории дискретных подгрупп групп Ли. В мой адрес звучали всякого рода похвалы — превосходно! *Фантастика!* При этом, работая над теоремой супержёсткости, я на идейном уровне находился под сильным влиянием работ американского математика Дж. Мостова (George Mostow) о строгой жёсткости (Mostow rigidity theorem или strong rigidity theorem). Отмечу, что термин «супержёсткость» ввёл Дж. Мостов после моей работы.

Давайте вернёмся к Вашей работе... К тем результатам, которые были отмечены Филдсовской премией 1978 года.

Как я уже сказал ранее, я получил Филдсовскую медаль в основном за то, что доказал теорему об арифметичности в случае равномерных решёток. Но при этом были отмечены и другие результаты. Один из них — теорема о нормальных подгруппах решёток полупростых групп Ли (normal subgroup theorem). Доказательство этой теоремы, с моей точки зрения, более впечатляюще, чем доказательство теоремы о супержёсткости. Но для людей вне этой области, видимо, оно таким не показалось.

Поясните, пожалуйста, Вам удалось всё-таки получить медаль Филдса или нет?

На конгресс меня не пустили. Причём не пустили из-за позиции Национального комитета советских математиков. Я сейчас в связи с премией Абеля, для которой надо было написать автобиографию, об этом более-менее подробно рассказал. Вы, по-видимому, знакомы с тем, как происходила выдача разрешений на поездку за границу в те времена.

Грубо говоря, это была многоступенчатая система отбора. Власть пре-державшие и руководство АН СССР не возражали против моего участия в конгрессе. Но за формирование делегации в Хельсинки отвечал Национальный комитет советских математиков. Его председателем был академик И. М. Виноградов, а главой делегации был академик Л. С. Понтрягин. Они были крайне недовольны тем, что я, не очень известный кандидат наук, получил Филдсовскую премию. И они решили не включать меня в состав делегации на конгресс. Отмечу, что руководство АН СССР было недовольно тем, что я не был включён в состав делегации, поскольку это повлекло за собой международный скандал.

Был ли в этом запрете участвовать в Математическом конгрессе элемент антисемитизма или нет?

Ну да, был. Хотя, они, может, считали, что нет и что просто я не вписываюсь в их сообщество. И скорее элемент антисемитизма проявлялся при защите моей докторской диссертации (её темой были «Дискретные подгруппы полупростых алгебраических групп»). Я написал об этом в автобиографии на английском языке. Она выйдет в книге про премии Абеля за последние пять лет. Видимо, выйдет года через три.

А оригинал Вы написали на русском или английском?

На английском.

Вашу автобиографию можно перевести на русский?

Я пока не хочу.

Когда же Вам вручили Филдсовскую медаль?

Как я уже рассказал, на вручение Филдсовской медали на конгресс в Хельсинки в 1978 году меня не пустили, но на следующий год я смог на 3 месяца выехать в ФРГ, в университет Бонна, по приглашению Фридриха Хирцебруха (Friedrich Hirzebruch). Это был такой settlement, попытка сгладить скандал. Национальный комитет советских математиков уже не возражал против этой поездки. И как раз там, на небольшой церемонии, мне вручили Филдсовскую медаль. Специально для этого в Бонн приезжал Жак Титс (Jacques Tits). (Он стал лауреатом премии Абеля 2008 года).

Титс отмечал: «Маргулис полностью или почти полностью решил несколько важных задач о теории дискретных подгрупп групп Ли, задач, корни которых уходят глубоко в прошлое и актуальность которых выходит далеко за рамки самой этой теории. Не будет преувеличением сказать, что он несколько раз изумлял экспертов, решая задачи, которые в то время казались совершенно недоступными. Ему

удалось это сделать благодаря владению разнообразными методами, которые он использовал с необычайным мастерством и изобретательностью»⁴⁾.

А потом я долго был невыездным. У меня есть копия письма от 1981 года, когда я хотел, по приглашению коллег, поехать во Францию, а мне не дали визы ввиду резко отрицательного мнения Национального комитета советских математиков.

Вы не были диссидентом?

Нет, не был. На самом деле, Национальный комитет — это была группа математиков, которые считали, что они должны всё контролировать, что они лучше знают, что происходит в математике СССР, и они должны решать, кого предлагать для Филдсовской медали и прочее.

Слава Богу, что Вас не заставили отказаться от премии...

Там была такая же процедура, как с премией Абеля, нужно было согласие, чтобы принять премию.

Вас пытались заставить не принять Филдсовскую медаль?

Нет, не пытались.

Можно ли сказать, что часть Ваших работ является теоретической основой интернет-коммуникаций?

После защиты кандидатской диссертации я работал в Институте проблем передачи информации АН СССР, где ко мне относились очень хорошо. Там было две лаборатории, одну из них возглавлял Р. Л. Добрушин, где я работал, а другую — М. С. Пинскер, он больше занимался теорией информации. И эти две лаборатории отвечали моим интересам в математике. Была некая тематика ИППИ, в которую я был вовлечён — в частности, графы-расширители. Отмечу, что среди теоретиков информатики я наиболее известен именно благодаря работе по графам-расширителям.

Это работа из области теоретической информатики. Есть информатика для приложений, а есть теоретическая информатика, и лауреаты

⁴⁾ «Margulis has completely, or almost completely, solved a number of important problems in the theory of discrete subgroups of Lie groups, problems whose roots lie deep in the past and whose relevance goes far beyond that theory itself. It is not exaggerated to say that, on several occasions, he has bewildered the experts by solving questions which appeared to be completely out of reach at the time. He managed that through his mastery of a great variety of techniques used with extraordinary resources of skill and ingenuity».

премии Абеля Ави Вигдерсон (Avi Wigderson) и Ласло Ловас (Lovász László) тоже работают в этой области.

Определение графов-расширителей дал как раз Марк Пинскер. Это регулярный граф, у которого маленькое подмножество начинает быстро распространяться. Существование таких графов-расширителей было доказано М. С. Пинскером с использованием вероятностных соображений. Однако он не смог дать явную конструкцию таких семейств. Я же в 1973 году, используя свойство (Т) Каждана, показал, как явно построить такие семейства.

А долго у Вас шла работа над идеей расширителей?

Недолго. Свою наиболее известную и цитируемую статью по графам-раширителям я опубликовал в 1973 году как раз под влиянием Пинскера. В ней было сделано первое явное построение бесконечного семейства графов-расширителей. Я об этом рассказал в Абелевском интервью, обычно два человека его берут во время Абелевской недели⁵⁾.

Вам присудили премию Абеля 2020 года «за новаторское использование методов теории вероятностей и динамики в теории групп, комбинаторике и теории чисел». Что Вы делали, когда Вам позвонили по поводу вручения премии? В какой момент Вас застал звонок из Осло?

На самом деле там была довольно забавная история. Вообще математикам обычно звонят в день объявления. И обычно звонят где-то за несколько часов до оглашения имён. Но, видимо, из-за пандемии ковида мне позвонили на два дня раньше. Моя жена подняла трубку, и, услышав слово «премия», решила, что это мошенники, и повесила трубку. Во второй раз ей показалось, что речь идёт о Нобелевской премии по математике. Она ответила, что по математике Нобелевской премии не бывает. Но в третий раз наконец всё урегулировалось.

Мне сказали, что первоначальный пул для отбора Абелевским комитетом — где-то 100 ведущих математиков мира, из которых начинают отбирать... А то, что Вам дали премию совместно с Гилелем Фюрстенбергом (Hillel Furstenberg) — это естественно?

Это вполне естественно.

⁵⁾ Björn Ian Dundas, Christian F. Skau. Interview with Abel Laureate 2020 Gregory Margulis // EMS Newsl. 2020. № 118. P. 51–56. DOI 10.4171/NEWS/118/11; <https://ems.press/journals/mag/articles/17378>.



Абелевские лауреаты у памятника Абелю: Г. Фюрстенберг (2020), Л. Ловас (2021), Д. Салливан (2022), Э. Семереди (2012), Г. А. Маргулис (2020)

Ваши работы дополняют друг друга?

В некотором смысле это одна область математики. Я знал о его работах, а он о моих. Опять же в автобиографии я более подробно пишу об этой истории. Я находился под влиянием его работ, как, возможно, и он моих.

Вы вместе когда-нибудь работали?

Нет, я же был в Москве, а он работал в Израиле и в США.

То есть Вы не были соавторами?

Нет, не были.

Вам приходилось проходить цензуру, так называемый первый отдел?

Нет, был акт экспертизы. Но, скажем, где-нибудь в США коллеги, которые работают не университетах, а в компаниях, тоже проходят аналогичную процедуру экспертизы. Ведь это, может быть, на самом деле интеллектуальная собственность компании.

Ваш ученик, говоря о Вас добрые слова, сказал, что Вы чувствуете природу задачи. Что Вы интуитивно её понимаете...

Да, чтобы доказать что-то сложное, надо сначала делать это на интуитивном уровне.

А скажите, пожалуйста, Вы по духу скорее создатель теорий (theory builder) или решатель задач (problem solver)?

Скорее problem solver. Я постоянно думаю над задачами. Есть такое понятие, как математический вкус, мне кажется, что он у меня есть. Есть нерешённые проблемы, которые кажутся бесконечно сложными, но я пытаюсь какие-то из них решить. При этом даже среди наиболее выдающихся математиков есть те, у кого нет особого математического вкуса, но они получают великие результаты. Они настолько сильны, что им вкус особо не нужен (*смеётся*). Я не такой. По-видимому, я технически сильный математик, но далеко не на их уровне...

Есть классификация, введённая Фрименом Дайсоном, что есть математики-птицы, а есть математики-лягушки...

По-английски это можно было сказать так: insight or vision. Vision — видеть широко, а insight — в глубь вещей. В переводе с поэтического языка.

И Вы...?

Я — insight. А есть люди, опять же великие математики, которые не insight, а vision.

А что Вас больше всего увлекает в математике? Почему Вам нравится заниматься математикой?

Потому что нравится. В ней есть красота.

Ваша голова 24 часа в сутки думает о математике?

Сейчас нет. До какого-то возраста я был на ней сосредоточен. Когда я учился в школе, а математика мне была интереснее всего другого, то спрашивал папу, почему я должен учить и другие предметы. В итоге он мне объяснил, что надо же знать, где искать информацию о других сферах жизни. Есть максима, принадлежащая Эйнштейну: «образование — это то, что остаётся, когда всё выученное в школе забыто» (education is that which remains when one has forgotten everything he learned in school).

А что Вам больше всего не нравится в математике?

Не знаю. Могут не нравиться всякие бюрократические и административные вещи, но это же не математика.

Есть ли задачи, которые Вы не смогли решить?

Есть, конечно.



Г. А. Маргулис с женой Раей

Вы участвовали в олимпиадах?

Да. Я участвовал в Московской математической олимпиаде, в республиканской математической олимпиаде, где получил первую премию, благодаря чему меня включили в команду СССР на IMO (Международная математическая олимпиада) в Чехословакии в 1962 году, где я получил серебряную медаль. Среди участников IMO довольно много людей из СССР и соцстран, которые стали известными математиками. Так, лауреат премии Абеля 2021 года Ласло Ловас из Венгрии, о котором я упоминал выше, в течение трёх лет выигрывал на IMO золотую медаль. Но в целом, когда я смотрю список победителей международных олимпиад, то далеко не все те, кто получал там первые премии, стали известными математиками.

На Ваш взгляд, олимпиады по математике — это всё-таки скорее спорт или наука?

Это способ определять наиболее способных. Но не единственный. Скажем, Яков Синай говорил, что принимал участие в олимпиадах, но довольно безуспешно. А Александр Кириллов и Владимир Арнольд были победителями олимпиад. Есть разные пути в математику.

Вы давно поняли, что одарены математически?

Я заинтересовался математикой лет с семи. У меня папа тоже был математиком, кандидатом педагогических наук, и его руководителем

был Александр Хинчин, один из основных специалистов в СССР по теории вероятностей. На Западе его имя звучит наряду с именем Колмогорова, но Колмогоров был более знаменит, чем Хинчин. Папа интересовался проблемами педагогики и образования. Он как-то понял, что у меня есть талант, и он меня всячески поддерживал и поощрял. С ранних лет я умел перемножать в уме двузначные числа. Ещё я играл в шахматы, что нравилось маме...

Игра в шахматы мешала или помогала Вашему занятию математикой?

Когда я учился в школе, не очень мешала, но как только я поступил в университет, то пытался продолжать играть, но забросил. В истории шахмат были профессиональные математики. Скажем, второй чемпион мира Эммануил Ласкер. В Советском Союзе шахматы были значимой профессией, наряду с балетом они были гордостью государства. Это была целая индустрия. В школах были шахматные кружки, а в каждом районе был Дом пионеров с шахматным кружком, был и городской Дом пионеров с кружком.

Вы жили в Москве?

Да, в Москве, в Ленинградском районе. И сначала я ходил в Ленинградский дом пионеров, а потом на Стадион юных пионеров.

Стадион, увы, сломали, построили Третье транспортное кольцо. Осталась одна стенка, которую Вы узнаете...

Я думаю, что уже и не узнаю. Когда я поступил в университет, я понял, что не смогу продолжать заниматься шахматами.

А что бы Вы сказали молодым людям, которые думают о карьере математика?

Что надо любить математику, что многое делается вовсе не благодаря озарению, а за каждым результатом — тяжёлый труд. Если тебя озаряет, то как раз потому, что ты много над этим думаешь. И что бывают неудачи...

У Вас хватает времени на что-то другое: на чтение, походы в театр или кино?

Я бы сказал, что сейчас меня это больше интересует, чем раньше.

Спасибо за интересный разговор.