

Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского»

О. В. Шварцман

1. О ТРЕУГОЛЬНИКАХ С ДАННЫМ ОСНОВАНИЕМ AB И ЗАДАННОЙ ПЛОЩАДЬЮ S

Все рассуждения проведем в единичном диске Пуанкаре $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим в единичном диске отрезок AB (рис. 1). Пусть A' и B' — инверсные образы точек A и B при инверсии inv_S относительно единичной окружности $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

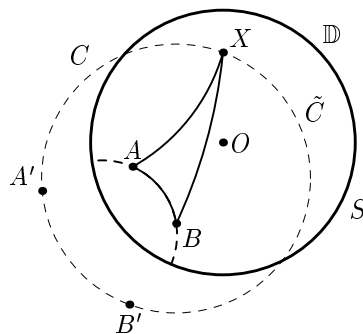


Рис. 1.

ЛЕММА. Пусть C — любая окружность, проходящая через точки A' и B' и пересекающая диск \mathbb{D} по дуге $\tilde{C} = D \cap C$. Тогда для всех точек X дуги \tilde{C} площадь гиперболического треугольника AXB принимает одно и то же значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое движение t гиперболического диска \mathbb{D} продолжается до преобразования $\hat{t}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, которое а) сохраняет окружность S , б) переводит окружности расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$ в окружности.

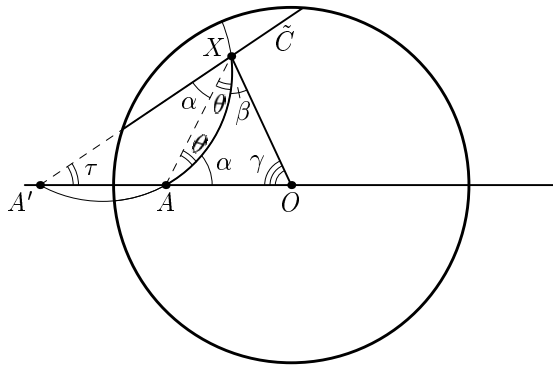


Рис. 2.

Из свойства а) следует, в частности, что $\hat{t} \circ \text{inv}_S = \text{inv}_S \circ \hat{t}$. Поэтому, применив подходящее движение t , можно считать, что точка B совпадает с центром диска, а точка A лежит на вещественной оси. Поскольку $\text{inv}_S(0) = \infty$, то по свойству б) «дуга» \tilde{C} будет хордой диска — пересечением прямой, проходящей через точку A' с окружностью S , см. рис. 2. Рассмотрим гиперболический треугольник AXO , в котором стороны OX и OA есть отрезки прямых, а сторона AX представляет собой дугу окружности T , проведенной через точки A' , A и X . Докажем, что сумма углов α , β и γ в треугольнике AXO не зависит от положения точки X на «дуге» \tilde{C} . С этой целью проведем хорду AX окружности T и обозначим θ равные углы, которые эта хорда образует с окружностью T (см. рис. 2). Из (евклидовых) теорем о вписанном угле и угле между касательной и хордой следует, что $\theta = \tau$. Угол τ не зависит от положения точки X . Таким образом, $\alpha + \beta + \gamma + 2\tau = \pi$, т. е. гиперболическая площадь треугольника AXO равна $\pi - \alpha - \beta - \gamma = 2\tau$ и не зависит от положения точки X . \square

Кажется, что такой прямой взгляд на происходящее и элементарнее, и проще. По ходу дела мы инвариантно охарактеризовали линии уровня функции

$$S(X) = \text{площадь треугольника } AXO$$

как след пучка окружностей через точки A' , B' в диске \mathbb{D} . Это бывает полезно при решении разного рода «гиперболических» задач на экстремумы.

Теперь уже легко показать, что в гиперболическом треугольнике ABC существует единственная точка O такая, что площади треугольников OAB , OBC , OAC равны. В самом деле, пусть K — такая точка на стороне AB , что площадь треугольника AKC равна одной трети площади

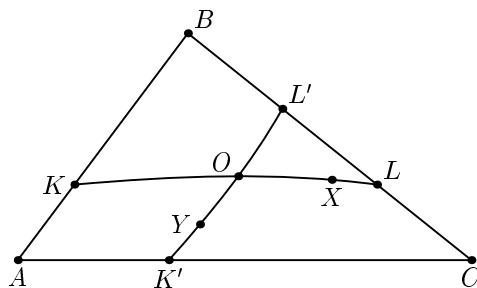


Рис. 3.

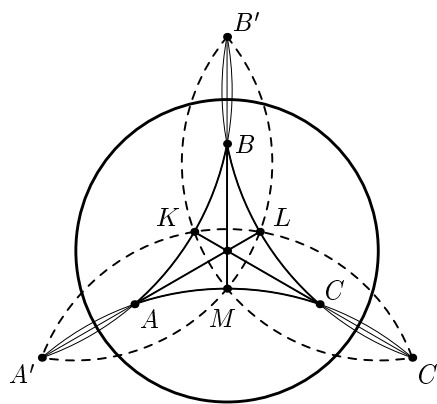


Рис. 4.

исходного треугольника (существование такой точки следует, например, из соображений непрерывности). Аналогично, на стороне BC выбирается точка L так, что $S_{ALC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Согласно лемме через точки K и L проходит единственная линия уровня функции $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Искомая точка O является единственной точкой пересечения линии уровня $S(X)$ и аналогичной линии уровня $S(Y) = S_{AYB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающей стороны AC и BC в точках K' и L' соответственно (см. рис. 3).

2. О БИСЕКТОРАХ ПЛОЩАДИ

Назовем бисектором площади прямую, проходящую через вершину треугольника и делящую его площадь пополам.

ТЕОРЕМА (И. ТКАЧЕНКО, [1, ТЕОРЕМА 10, с. 121]). *Три бисектора в треугольнике (евклидовом, сферическом или гиперболическом) пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим гиперболический треугольник ABC в диске Пуанкаре \mathbb{D} и пусть K, L, M — точки, в которых бисекторы пересекают стороны AB, BC и CA соответственно. Мы сохраняем обозначения A', B' и C' из предыдущего раздела для точек, инверсных точкам A, B и C относительно граничной окружности S диска \mathbb{D} . Требуется доказать, что бисекторы пересекаются в одной точке. В рассматриваемой модели это эквивалентно следующему утверждению (см. рис. 4): дуга KC' окружности S_K , проходящей через точки K, C, C' , дуга $B'M$ окружности S_M , проходящей через точки M, B, B' и дуга $A'L$ окружности S_L , проходящей через точки

L , A , A' , пересекаются в одной точке. Если обозначить через O точку пересечения двух бисекторов, то без потери общности можно считать, что O — центр диска \mathbb{D} (почему?). Рассматриваемые дуги превращаются при этом в общие хорды трех окружностей, о которых идет речь в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ [2, задача 116]. *Даны три круга, все пересекающиеся между собой. Тогда три общие хорды каждой двух из трех окружностей пересекаются в одной точке (рис. 5).*

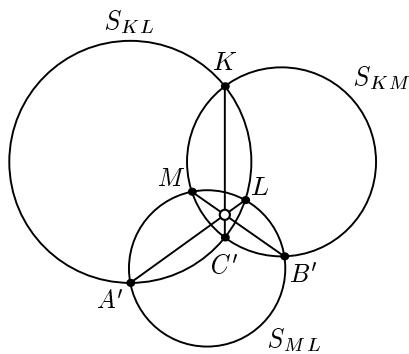


Рис. 5.

Давайте поймем, к каким трем кругам нужно применить это утверждение. Для этого нужно заметить, что по лемме существует единственная окружность S_{KL} (соответственно, S_{LM} и S_{MK}), проходящая через точки A', K, L, C' (соответственно, точки B', B, C, C' и A', A, C, C'). Это окружность, содержащая геометрическое место точек X , таких что $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Пусть D_{KL} (соответственно, D_{KM} , D_{ML}) — круг, ограниченный окружностью S_{KL} . Теорема о

бисекторах есть прямое следствие нашего утверждения, примененного к кругам D_{KL} , D_{KM} , D_{ML} (см. рис. 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бибигов П. В., Ткаченко И. В. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2005. С. 113–126.
- [2] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия)*. М.: ГТТИ, 1952.