

## Обобщенные супергармонические последовательности

И. И. Богданов      Г. Р. Челноков

В этой заметке приводится решение задачи 5.9а) из задачника «Математического просвещения». Напомним формулировку:

В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трех соседей слева и трех справа. Докажите, что числа равны.

Формально числа, записанные в клетках бесконечной клетчатой ленты, можно рассматривать либо как функции  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  из множества целых чисел в множество действительных чисел, либо как бесконечные в обе стороны последовательности действительных чисел

$$\dots, f_{-n}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$$

Мы выбираем второй способ и далее говорим только о последовательностях.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $F$  — непустое конечное множество целых чисел, симметричное относительно нуля, причем числа в  $F$  взаимно просты в совокупности. Последовательность  $a_n$  назовем  $F$ -супергармонической, если для любого  $n$  выполняется неравенство

$$a_n \geq \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} a_{n+f}.$$

Например,  $\{-1, +1\}$ -супергармонические последовательности — это то же самое, что супергармонические на  $\mathbb{Z}^1$  функции.

**ТЕОРЕМА.** Если  $F$ -супергармоническая последовательность неотрицательна, то она постоянна.

Задача 5.9а) является частным случаем этой теоремы, в котором  $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ . Для простоты изложения мы приводим только доказательство этого частного случая. Общее доказательство получается аналогично.

Бесконечные в обе стороны последовательности чисел образуют векторное пространство относительно операций покомпонентного сложения и умножения всех членов на константу. Зададим на этом векторном пространстве линейный оператор  $X$  сдвига влево:  $X(a_n) = (b_n)$ , где  $b_n = a_{n+1}$ .

Нас будут интересовать многочлены от  $X$  относительно стандартных операций: произведение операторов есть их композиция, например, оператор  $X^2$  переводит последовательность  $(c_n)$  в  $(c_{n+2})$ ; сложение операторов переводит последовательность в сумму ее образов, например, оператор  $X^2 + 2X + 1$  переводит последовательность  $(c_n)$  в  $(c_{n+2} + 2c_{n+1} + c_n)$ ; число  $\lambda$  понимается как оператор умножения каждого члена последовательности на  $\lambda$ . Каждый такой многочлен является линейным оператором.

Напомним, что в этом случае композиция линейных операторов совпадает с произведением многочленов, т. е. композиция операторов  $P(X)$  и  $Q(X)$  есть оператор  $PQ(X)$ . Например,  $X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$ , т. е., подействовав на последовательность сначала оператором  $X + 1$ , а затем  $X + 2$  (или наоборот), мы получим тот же результат, как при действии оператором  $X^2 + 3X + 2$ .

На этом языке удобно записываются многие понятия. Так, множество линейных рекуррент с уравнением  $u_{n+k} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{k-1} u_{n+k-1}$  — это множество последовательностей, для которых

$$X^k(u_n) = (a_0 + a_1 X + \dots + a_{k-1} X^{k-1})(u_n),$$

или, проще говоря, просто множество всех последовательностей, обнуляемых оператором  $X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \dots - a_1 X - a_0$ , т. е. его ядро. Отсюда, раскладывая этот многочлен на линейные сомножители, нетрудно получить общую формулу линейной рекурренты.

Условие задачи 5.9а) формулируется теперь в следующем виде. Дана такая последовательность  $(a_n)$  положительных чисел, что

$$6a_{n+3} \geq a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6},$$

или, другими словами, применение многочлена

$$P(X) = 1 + X + X^2 - 6X^3 + X^4 + X^5 + X^6$$

к последовательности  $(a_n)$  дает неположительную последовательность. Требуется доказать, что  $(a_n)$  есть константа.<sup>1)</sup>

Заметим, что  $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$ , причем все коэффициенты  $Q(x)$  неотрицательны.<sup>2)</sup> Действительно, достаточно проверить этот факт для

<sup>1)</sup> При доказательстве теоремы многочлен  $P(X)$  нужно заменить на соответствующий множеству  $F$  возвратный многочлен ( $F$ -многочлен).

<sup>2)</sup> Аналогичное утверждение справедливо и для произвольных  $F$ -многочленов, доказательство повторяется почти дословно.

многочленов  $x^{k+r} - 2x^k + x^{k-r}$ , потому что  $P(x) = (x^6 - 2x^3 + 1) + (x^5 - 2x^3 + x) + (x^4 - 2x^3 + x^2)$ . Для многочленов указанного вида утверждение очевидно:

$$x^{k+r} - 2x^k + x^{k-r} = x^{k-r}(x^r - 1)^2 = (x - 1)^2 x^{k-r}(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + 1)^2.$$

Далее, корни  $Q(z)$  по модулю не равны 1, т. е.  $Q(z) \neq 0$  при любом комплексном  $z$ ,  $|z| = 1$ . Действительно,  $|P(z)| \geq |6z^3| - 1 - |z| - |z^2| - |z^4| - |z^5| - |z^6| = 0$ , причем равенство может достигаться лишь когда числа 1 и  $z$  имеют равные аргументы, т. е.  $z = 1$ . Но  $Q(1) \neq 0$  из положительности коэффициентов.<sup>3)</sup>

Обозначим  $Q(X)(a_n) = (b_n)$ . Тогда элементы  $(b_n)$  получаются из элементов  $(a_n)$  линейной комбинацией с положительными коэффициентами (а именно, с коэффициентами многочлена  $Q$ ); таким образом, последовательность  $(b_n)$  положительна. По условию, последовательность  $(d_n) = (X - 1)^2(b_n) = P(X)(a_n)$  неположительна. Покажем, что  $(b_n)$  постоянная. Пусть  $(c_n) = (X - 1)(b_n)$ , тогда  $(d_n) = (X - 1)(c_n)$ . По условию получаем  $d_n = c_{n+1} - c_n \leq 0$ , т. е.  $(c_n)$  не возрастает. Предположим, что существует  $c_k \neq 0$ . Если  $c_k < 0$ , то и все  $c_l \leq c_k < 0$  при  $l > k$ . Тогда  $b_{l+1} - b_l \leq c_k$  при  $l > k$ , т. е.  $b_l$  с возрастанием  $l$  на каждом шаге убывает хотя бы на  $|c_k|$ ; это невозможно, так как  $(b_n)$  положительна. Аналогично, если  $c_k > 0$ , то при всех  $l < k$  с уменьшением  $l$  величина  $b_l$  уменьшается хотя бы на  $c_k$ , что невозможно. Итак,  $c_k \equiv 0$ , что и означает, что  $(b_n)$  постоянная.

Так как коэффициенты  $q_i$  многочлена  $Q(x)$  и члены последовательности  $(a_n)$  положительны, то  $b_n = q_0 a_n + q_1 a_{n+1} + \dots \geq q_0 a_n$ , т. е.  $a_n \leq b_n / q_0 = b_0 / q_0$ , и последовательность  $(a_n)$  ограничена. Далее, заметим, что применение оператора  $Q(X)$  к постоянной последовательности умножает ее на  $Q(1)$ . Поскольку последовательность  $Q(X)(a_n)$  постоянная и  $Q(1) \neq 0$ , то из  $(a_n)$  можно вычесть постоянную последовательность  $c = b_0 / Q(1)$  и получить такую (ограниченную!) последовательность  $a'_n = a_n - c$ , что  $Q(X)(a'_n) = (0)$ .

Решение хотелось бы закончить так. Мы получили, что  $(a'_n)$  есть линейная рекуррента, у характеристического уравнения которой нет корней, по модулю равных 1. Применяв общую формулу линейной рекурренты, получаем, что  $(a'_n)$  есть линейная комбинация последовательностей вида  $(R(n)\alpha^n)$ , где  $\alpha$  пробегает множество корней  $Q(x)$ , а  $R(n)$  — многочлен. Казалось бы, поскольку  $|\alpha| \neq 1$ , то такая последовательность

<sup>3)</sup>При доказательстве теоремы аналогичное утверждение нужно доказать для произвольного  $F$ -многочлена. В этом доказательстве существенно используется условие, что числа из  $F$  взаимно просты.

Дальнейшие рассуждения опираются на указанные свойства  $F$ -многочленов, а в остальном от вида  $F$  они не зависят.

ограничена лишь когда  $a'_n \equiv 0$ . Это и в самом деле верно, но известные нам доказательства основаны на достаточно тонких рассуждениях с применением теоремы Кронекера.

Поэтому завершим доказательство несколько иначе (и проще).

Мы должны показать, что, применяя  $Q(X)$  к ограниченной ненулевой последовательности, нельзя получить (0). Разложим  $Q(x)$  на линейные множители; тогда достаточно доказать это для одного такого множителя  $X - \alpha$ , где  $|\alpha| \neq 1$  (действительно, поскольку этот оператор переводит ограниченные последовательности в ограниченные, то по индукции сразу получается требуемое). Однако  $X - \alpha$ , очевидно, обнуляет лишь последовательности вида  $u_n = \alpha^n u_0$ , которые при  $|\alpha| \neq 1$  и  $u_0 \neq 0$  не ограничены, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Похожими методами легко решается, например, задача 7.11 из задачника «Математического просвещения». Напомним ее условие:

Все комплексные корни уравнения  $A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n = 0$  по модулю строго меньше 1. Последовательность  $\{v_k = A_0 u_{k+n} + A_1 u_{k+n-1} + \dots + A_n u_k\}$  — сходится. Докажите, что последовательность  $\{u_k\}$  тоже сходится.

Достаточно понять, что на классе ограниченных последовательностей верно операторное равенство  $(1 - aX)(1 + aX + a^2 X^2 + \dots) = 1$ , если  $|a| < 1$ .