Нам пишут

О тождествах Рамануджана

С. В. Маркелов

В книге В. И. Левина [1] написано:

«Приведем еще две замечательные формулы Рамануджана:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

Эти точные равенства являются, конечно, частными случаями значительно более общих соотношений, которыми располагал Рамануджан, но о которых он никому ничего не сообщил. После его смерти часть этих общих соотношений была восстановлена другими математиками, но не подлежит сомнению, что некоторые из них утеряны навсегда.»

Известные автору попытки вывести эти «более общие соотношения» решают задачу с алгебраической точки зрения, выводя тождества «в буквах». (см. [3, 4]). В то же время, если посмотреть на ситуацию с тригонометрической точки зрения, можно прийти к новым тождествам, см. следующую страницу. Предлагаю желающим подумать попробовать выписать аналогичные тождества для других знаменателей.

Список литературы

[1] Левин В. И. *Рамануджан — математический гений Индии.* М.: Знание, 1968. С. 32–33.

[2] Прасолов В. В. *Тождества Рамануджана* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005. С. 104–107.

[3] Рисенберг Д. *Теорема Виета и сумма радикалов.* Задачи по математике. 2000–2004. МЦНМО, 2004. С. 168–175. Файлы книги: ftp.mccme.ru/users/dotsenko

$$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}}+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}}+\sqrt[3]{\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}}=\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt[3]{13}}{2}}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{31}+\cos\frac{15\pi}{31}+\cos\frac{23\pi}{31}+\cos\frac{27\pi}{31}+\cos\frac{29\pi}{31}}+\\&+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{31}+\cos\frac{7\pi}{31}+\cos\frac{17\pi}{31}+\cos\frac{19\pi}{31}+\cos\frac{25\pi}{31}}+\\&+\sqrt[3]{\cos\frac{5\pi}{31}+\cos\frac{9\pi}{31}+\cos\frac{11\pi}{31}+\cos\frac{23\pi}{31}+\cos\frac{21\pi}{31}}=\sqrt[3]{\frac{2\sqrt[3]{62}-11}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{43}+\cos\frac{11\pi}{43}+\cos\frac{21\pi}{43}+\cos\frac{27\pi}{43}+\cos\frac{35\pi}{43}+\cos\frac{39\pi}{43}+\cos\frac{41\pi}{43}}+\\&+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{43}+\cos\frac{5\pi}{43}+\cos\frac{19\pi}{43}+\cos\frac{23\pi}{43}+\cos\frac{31\pi}{43}+\cos\frac{33\pi}{43}+\cos\frac{37\pi}{43}}+\\&+\sqrt[3]{\cos\frac{7\pi}{43}+\cos\frac{9\pi}{43}+\cos\frac{13\pi}{43}+\cos\frac{15\pi}{43}+\cos\frac{17\pi}{43}+\cos\frac{25\pi}{43}+\cos\frac{29\pi}{43}}=\\&=\sqrt[3]{\frac{13-3\sqrt[3]{86}}{2}}\end{aligned}$$

[4] Шевелев В. С. *Три формулы Рамануджана* // Квант, №6, 1988. С. 52–55. `http://kvant.mccme.ru/1988/06/tri_formuly_ramanudzhana.htm`