

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2014

Е. Ю. Смирнов

Три взгляда на ацтекский бриллиант

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 519.148
ББК 22.176
С50

Смирнов Е. Ю.
С50 Три взгляда на ацтекский бриллиант. — М.: МЦНМО, 2015. — 48 с.

ISBN 978-5-4439-0279-1

Сколькими способами можно разбить «ацтекский бриллиант» (ромб на клетчатой бумаге) на доминошки? Мы рассмотрим три разных решения этой задачи, в которых по ходу дела возникнут некоторые важные объекты и методы современной алгебраической комбинаторики и математической физики.

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором на летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2014 года. Она рассчитана на старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.176

Евгений Юрьевич Смирнов

ТРИ ВЗГЛЯДА НА АЦТЕКСКИЙ БРИЛЛИАНТ

Редакторы В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Подписано в печать 18.02.2015 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcme.ru

ISBN 978-5-4439-0279-1



9 785443 902791 >

© МЦНМО, 2015.

Введение

Рассмотрим какую-либо область на бумаге в клетку. Замощение доминошками — это способ разбить эту область на прямоугольники 2×1 так, чтобы они покрывали всю область и никакие два прямоугольника не имели бы общих внутренних точек (т. е. не накладывались), а пересекались бы только по границе.

В известной задаче для младших школьников предлагается доказать, что шахматную доску, из которой выброшены две противоположные угловые клетки, замостить доминошками нельзя. Мы будем иметь дело с фигурами, которые замостить доминошками можно; при этом нас будет интересовать, сколькими способами это можно сделать.

Вот самый простой пример. Возьмем прямоугольник размера $2 \times n$. Тогда количество способов замостить его доминошками равно $(n+1)$ -му числу Фибоначчи. Доказать это можно по индукции. Действительно, пусть $F(n)$ — число способов замостить прямоугольник $2 \times n$. Возьмем доминошку, покрывающую левый верхний угол прямоугольника. Тогда она может быть либо вертикальной, и оставшуюся часть прямоугольника можно замостить $F(n-1)$ способами, либо горизонтальной — тогда две клетки под ней тоже будут заняты горизонтальной доминошкой, и останется замостить прямоугольник $2 \times (n-2)$. Мы получили рекуррентное соотношение:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

А поскольку первые два члена у этой последовательности равны единице: $F(0) = F(1) = 1$, это и есть последовательность Фибоначчи.

Следующий вопрос, который возникает после этого — сколькими способами можно замостить доминошками прямоугольник произвольного размера $m \times n$? Это уже оказывается весьма непростой задачей, которая была решена в 1961 году Кастелейном [13] и независимо Темперли и Фишером [20]. Они доказали, что число замощений такого прямоугольника задается следующей, довольно замысловатой, формулой:

$$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{1/4}.$$

Доказательство этого факта можно прочесть, например, в статье [3]. Однако мы это утверждение обсуждать не будем, а вместо этого рас-

смотрим задачу о замощении другой фигуры — квадрата, только повернутого на 45° .

Рассмотрим множество квадратиков на клетчатой бумаге, координаты (x, y) центров которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n$, где n — целое положительное число. Числа x и y при этом мы считаем полуцелыми. Будем называть такую фигуру *ацтекским бриллиантом*¹ порядка n ; на рис. 0.1 изображен ацтекский бриллиант порядка 4 и пример его замощения доминошками.

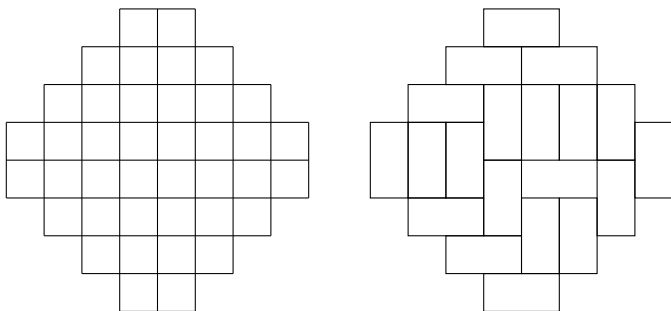


Рис. 0.1. Ацтекский бриллиант порядка 4 и пример его замощения

Сколько существует способов замостить доминошками ацтекский бриллиант порядка n ? Можно попробовать посчитать это количество вручную при малых n . При $n = 1$ ацтекский бриллиант — это просто квадрат 2×2 , который, очевидно, можно замостить двумя способами. При $n = 2$ найти все замощения явно тоже несложно (проделайте это!); их оказывается 8. При дальнейшем росте n число замощений очень быстро растет: так, при $n = 3$ их уже оказывается 64, так что перечислить их все — задача не безнадежная, но при ручном переборе требующая некоторого терпения (или умения программировать). Однако при $n = 4$ обойтись без компьютера уже значительно сложнее: замощений оказывается 1024.

Итак, в первых примерах число замощений ацтекского бриллианта оказывается степенью двойки: $2, 2^3, 2^6, 2^{10}$. По приведенному фрагменту последовательности можно догадаться, чему равны показатели степени: это треугольные числа, т. е. суммы вида $1 + 2 + \dots + n$ — иначе говоря, $n(n + 1)/2$. Это и составляет утверждение теоремы об ацтекском бриллианте.

¹В литературе также встречается термин «ацтекский диамант», на наш взгляд, менее удачный.

ТЕОРЕМА ОБ АЦТЕКСКОМ БРИЛЛИАНТЕ. Число замощений ацтекского бриллианта порядка n доминошками размера 1×2 равняется $2^{n(n+1)/2}$.

Как устроена эта брошюра. Три последующие главы этой брошюры посвящены трем разным доказательствам теоремы об ацтекском бриллианте. Эти доказательства основаны на разных идеях и методах; наша цель состоит в первую очередь в том, чтобы продемонстрировать, как эти методы работают. Читать (или не читать) эти доказательства можно независимо друг от друга. Вкратце расскажем о каждом из них.

В первом доказательстве с каждым из замощений ацтекского бриллианта связывается пара квадратных матриц специального вида — так называемых *знакочередующихся матриц*. Оказывается, что каждая из этих матриц по отдельности позволяет восстановить замощение «почти полностью»: есть лишь несколько участков, на которых замощение не восстанавливается однозначно. Анализируя степень этой неоднозначности, удастся найти общее число разбиений. Это первое опубликованное доказательство теоремы об ацтекском бриллианте; оно появилось в 1992 году в работе Ноама Элкиса, Грега Куперберга, Майкла Ларсена и Джима Проппа [9]. Хотя это и не имеет непосредственного отношения к нашему основному сюжету, мы также упоминаем *гипотезу о знакочередующихся матрицах*, которая долгое время привлекала внимание специалистов по комбинаторике и была доказана независимо Д. Зейльбергером и Г. Купербергом в середине 1990-х гг.

Второе доказательство, принадлежащее Джиму Проппу [17], основано на подсчете числа так называемых димерных конфигураций, или совершенных паросочетаний графов, — то есть числа способов разбить вершины графа на пары так, чтобы вершины в каждой паре были бы соединены ребром. Ключевым инструментом для этого будет операция расширения площадей (*urban renewal*), позволяющая сводить графы, для которых мы хотим найти количество совершенных паросочетаний, к более простым. Это рассуждение на несложном примере демонстрирует методы, используемые при работе с димерами в значительно более сложных задачах математической физики. А сама операция расширения площадей, как было недавно показано А. Б. Гончаровым и Р. Кеньоном [11], неожиданным образом возникает и в других задачах, в частности в таком новом и бурно развивающемся направлении математики, как теория кластерных алгебр.

Наконец, третье доказательство теоремы об ацтекском бриллианте, о котором пойдет речь, сводит подсчет числа замощений бриллианта к нахождению числа наборов непересекающихся путей определенного

вида на решетке. Число этих наборов выражается как некоторый определитель; для этого используется такой полезный комбинаторный прием, как метод непересекающихся путей Линдстрёма—Гесселя—Вьенно. Это доказательство опубликовали в 2005 году тайваньские математики Сэнь-Пен Эу и Тун-Шань Фу [10]. При этом используемое в доказательстве соответствие между замощениями и наборами путей упоминается и в более ранних работах, в частности, в книге Стенли [7, упр. 6.49].

Первые два доказательства используют лишь элементарные методы и вполне доступны для школьника, знакомого с началами комбинаторики и теории графов. Третье доказательство, на наш взгляд, является самым простым из всех трех, однако в нем используются такие «нешкольные» понятия, как группа перестановок и определитель матрицы.

Благодарности. Эта брошюра написана по материалам одноименного миникурса из трех лекций, прочитанных мною на XIV летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2014 г. школьникам старших классов и студентам младших курсов. Я благодарен организаторам школы за предоставленную возможность прочесть этот курс и всем слушателям за активное участие и многочисленные содержательные комментарии и обсуждения.

При подготовке брошюры я постоянно получал неоценимую помощь и поддержку от В. А. Клепцына и Г. А. Мерзона, которых фактически можно считать не редакторами, а соавторами этого текста. Кроме того, я признателен всем, кто высказывал отзывы по поводу предварительной версии брошюры: И. И. Богданову, А. Г. Кузнецову, Ф. В. Петрову и многим другим. Наконец, я хочу поблагодарить фонд «Династия» и фонд Дж. Саймонса за частичную финансовую поддержку.

Я буду рад получить отзывы, замечания и комментарии от читателей. Направлять их можно по адресу esmirnov@hse.ru.

Видеоматериалы прочитанного в Дубне курса доступны в видеотеке сайта Math-Net.Ru, <http://www.mathnet.ru>.

Взгляд первый: знаочередующиеся матрицы

Рассмотрим какое-нибудь замощение ацтекского бриллианта. Нам будет удобно считать, что оно расположено на плоскости, которая целиком заполнена доминошками, причем снаружи от бриллианта замощение является *регулярным*. Регулярное замощение строится так: каждую из полуплоскостей сверху и снизу от оси абсцисс заполним «кирпичной кладкой», как показано на рис. 1.1. Таким образом, интересующие нас замощения ацтекского бриллианта можно рассматривать как замощения *всей плоскости*, которые могут отличаться от регулярного замощения лишь в пределах конечного участка — собственно бриллианта.

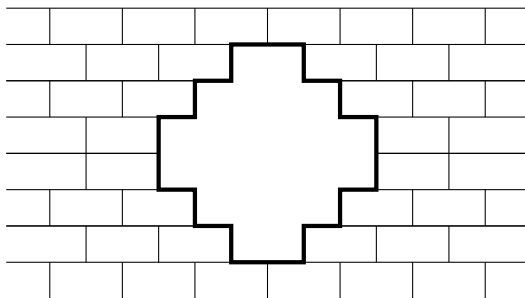


Рис. 1.1. Регулярное замощение

1.1. Замощение и конфигурация стрелок

В этом разделе мы построим по замощению ацтекского бриллианта доминошками другой связанный с ним комбинаторный объект — конфигурацию стрелок (см. рис. 1.2). Эта конфигурация будет удовлетворять некоторым довольно простым условиям — в частности, в любую вершину будут входить и выходить ровно две стрелки. Такие конфигурации в физике известны под названием «шестивершинной модели», поскольку для каждой вершины есть $\binom{4}{2} = 6$ вариантов ориентировать касающиеся ее стрелки. Мы обсудим физический смысл таких конфигураций чуть позже, в разделе 1.4, а пока перейдем к собственно построению.

Будем считать, что узлы решетки, на которой нарисован ацтекский бриллиант, раскрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке так, что точка $(-n, 0)$ является белой. При этом на границе каждого прямоугольника 2×1 оказывается ровно по три белых и черных вершины.

Рассмотрим какое-нибудь замощение и нарисуем на каждой из входящих в него доминошек две диагонали в форме буквы «V» так, чтобы каждая из диагоналей соединяла две белые вершины. Расставим на этих диагоналях стрелки, выбрав направления по следующему правилу: если диагональ идет с юго-востока на северо-запад, поставим стрелку в направлении от угла доминошки к середине противоположной стороны. Для диагонали, идущей с юго-запада на северо-восток, напротив, поставим стрелку в направлении от середины стороны к углу. В итоге получим картину наподобие изображенной на рис. 1.2.

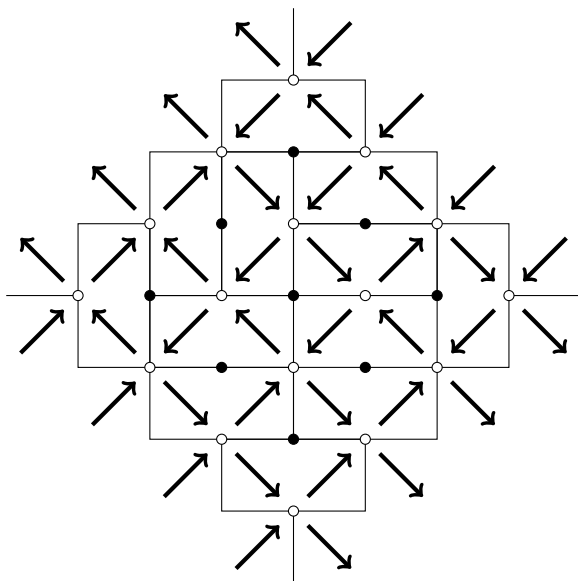


Рис. 1.2. Набор стрелок, построенный по разбиению

Предложение 1.1. *В каждую из вершин входят и из каждой вершины исходят ровно по две стрелки.*

Доказательство. В этом легко убедиться, перечислив все возможные способы, которыми в белой вершине могут сходиться две, три или четыре доминошки. Они изображены на рис 1.3. \square

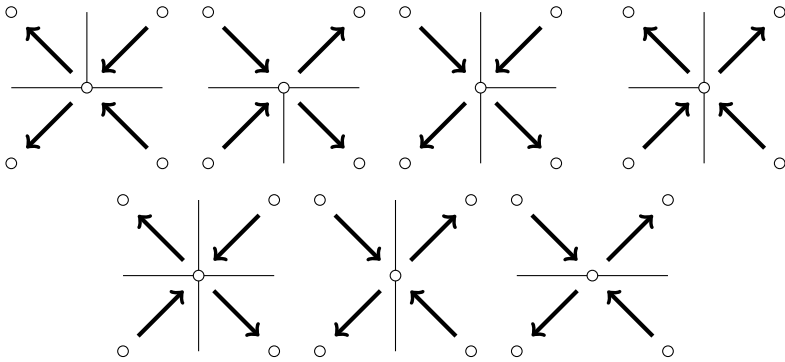


Рис. 1.3. Семь способов примыкания доминошек

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратите внимание, что семи способам примыкания доминошек соответствуют только шесть конфигураций стрелок: последним двум способам примыкания отвечает одна и та же конфигурация.

Заметим, что вне пределов ацтекского бриллианта — там, где замощение является регулярным, — расстановка стрелок также устроена регулярным образом. А именно, в верхней полуплоскости все стрелки, не лежащие внутри квадрата $|x| + |y| \leq n$, направлены «влево» (т. е. на северо-запад и юго-запад), а в нижней, наоборот, «вправо» (т. е. на северо-восток и юго-восток).

1.2. Чередование

Возьмем какое-нибудь замощение ацтекского бриллианта (продолженное до замощения всей плоскости), на котором расставлены стрелки, как сказано в предыдущем разделе. В каждой из белых вершин замощения сходятся две, три или четыре доминошки. Поставим в каждой из этих вершин число, равное количеству сходящихся там доминошек минус три. Иначе говоря, если в узле сходятся четыре доминошки, поставим там 1, если три — то 0, а если две, то -1 .

ЛЕММА 1.1. *В последовательности чисел, стоящих на произвольной диагонали (см. рис. 1.4), единицы и минус единицы чередуются (при этом между ними может быть произвольное число нулей).*

Доказательство. Сначала рассмотрим диагональ, идущую с юго-запада на северо-восток. Она проходит по нескольким доминошкам и на каждой из них соединяет один из углов с серединой противоположной стороны. По построению, каждая из направленных вдоль этой диаго-

нали стрелок указывает в угол доминошки, как показано на рис. 1.4. Заметим, что в вершине стоит единица, если в нее входят две стрелки, направленные вдоль этой диагонали, нуль, если одна стрелка в нее входит, а одна выходит, и минус единица, если обе стрелки из нее выходят. Действительно, в этом легко убедиться, посмотрев на рис. 1.3.

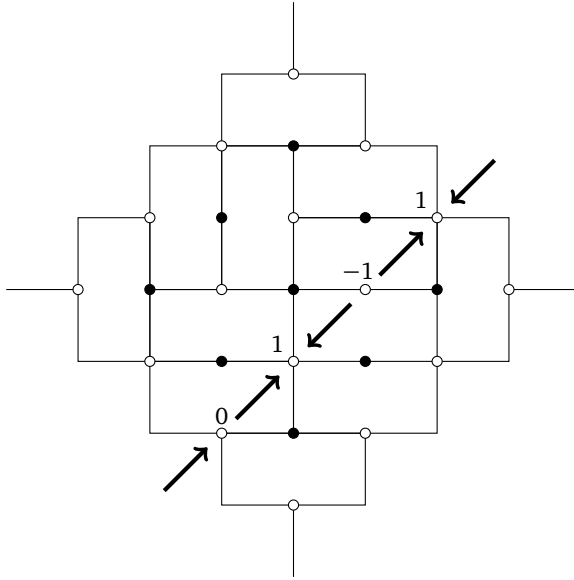


Рис. 1.4. К доказательству чередования знаков

Таким образом, узлы, в которых стоят единицы и минус единицы, соответствуют местам, где последовательность стрелок меняет направление. При этом единицы соответствуют «стокам», то есть узлам, для которых обе стрелки являются входящими, а минус единицы — «источникам», для которых обе стрелки исходящие. Ясно, что такие узлы чередуются, а это и составляет утверждение леммы.

Случай диагонали, идущей с юго-востока на северо-запад, разбирается аналогично; он отличается лишь направлением стрелок, и на чередование единиц и минус единиц это не влияет. \square

Лемма 1.2. *Сумма всех чисел на каждой диагонали равна 1.*

Доказательство. Рассмотрим диагональ, идущую с юго-запада на северо-восток (см. рис. 1.4). Посмотрим на то, как она пересекает регулярную часть замощения. Как мы уже отмечали, все стрелки в третьей четверти, расположенные вне бриллианта, будут смотреть на се-

веро-восток (т. е. вправо-вверх), то есть первым ненулевым числом на этой диагонали будет единица. Аналогично все стрелки в первой четверти вне бриллианта будут направлены на юго-запад, то есть и последним ненулевым числом в последовательности также будет единица. А поскольку единицы и минус единицы чередуются, то сумма всех чисел на диагонали будет равна 1.

Случай другого направления диагонали рассматривается аналогично. \square

1.3. Знакопередающиеся матрицы

Знакопередающаяся матрица — это квадратная матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

- все элементы матрицы равны либо 0, либо ± 1 ;
- ненулевые элементы в каждой строке и каждом столбце чередуются: за единицей идет минус единица, и наоборот (при этом между ними может быть произвольное число нулей);
- сумма всех элементов в каждой строке и каждом столбце равна 1; иначе говоря, единиц на одну больше, чем минус единиц.

Пример. Зафиксируем некоторую перестановку $\sigma \in S_n$ и рассмотрим матрицу этой перестановки, т. е. такую матрицу (a_{ij}) , для которой $a_{ij} = 1$ при $i = \sigma(j)$ и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Такая матрица будет знакопередающейся. Всего таких матриц будет столько же, сколько перестановок, т. е. $n!$.

Пример. Вот знакопередающаяся матрица, не являющаяся матрицей перестановки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Выпишите все знакопередающиеся матрицы порядка три (их должно получиться семь).

Оказывается, что знакопередающиеся матрицы, которые мы определили только что, непосредственно связаны с замощениями: а именно, по каждому замощению ацтекского бриллианта можно построить знакопередающуюся матрицу. Для этого рассмотрим некоторое замощение ацтекского бриллианта порядка n и расставим в его узлах числа 1, 0 и -1 так, как это было описано в предыдущем разделе. Множество всех белых вершин внутри ацтекского бриллианта будет образовывать квадрат $(n + 1) \times (n + 1)$. Повернем его на 45° по часовой стрелке и рассмотрим все значения в вершинах; они образуют квадратную матрицу порядка $n + 1$, которую мы обозначим через A .

Предложение 1.2. Матрица A является знакопередающей матрицей порядка $n + 1$.

Доказательство. Это напрямую следует из лемм 1.1 и 1.2. \square

Далее, ту же самую конструкцию, которая была описана в разделах 1.1 и 1.2, можно провести для черных вершин. Так, для них можно нарисовать по две стрелки на каждой доминошке по тому же правилу и расставить числа 1, 0 и -1 в вершинах, следуя обратному приглашению: 1 будет соответствовать вершине, в которой сходятся две доминошки, а -1 — вершине, в которой граничат четыре доминошки. Точно так же доказывается, что матрица из чисел, стоящих в черных вершинах, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n - 1$, также будет знакопередающей порядка n . Обозначим эту матрицу через B .

Пример. Замощению, изображенному на рис. 1.4, соответствуют следующие знакопередающие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по замощению ацтекского бриллианта порядка n мы научились строить две знакопередающие матрицы, порядки которых равны $n + 1$ и n .

1.4. Гипотеза о знакопередающих матрицах и квадратный лед

В предыдущем разделе мы определили знакопередающие матрицы. Они возникли в связи с конфигурациями стрелок, введенными в разделе 1.1. Оказывается, что и такие конфигурации, и знакопередающие матрицы возникают в различных задачах статистической физики — в частности, в связи с так называемой моделью квадратного льда (square ice model).

Рассмотрим квадратную решетку на плоскости, в узлах которой расположены атомы кислорода. Пусть также между каждыми двумя соседними атомами кислорода в середине соответствующего ребра находится атом водорода (см. рис. 1.5). Допустим, что каждый из атомов кислорода соединен химическими связями ровно с двумя соседними атомами водорода, и они тем самым образуют молекулу воды — H_2O . Соответственно, каждый из атомов водорода должен быть задействован ровно в одной молекуле.

Ясно, что молекула воды может быть образована шестью разными способами — именно столько есть способов выбрать два атома водорода

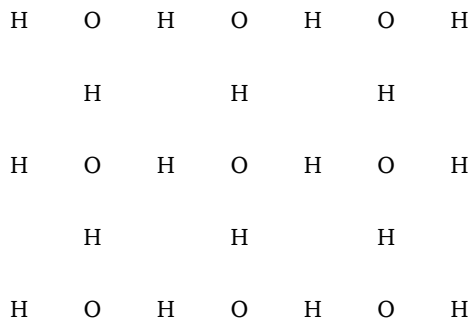


Рис. 1.5. Кристаллическая решетка квадратного льда

да из четырех, смежных с данным атомом кислорода. В четырех из этих способов молекула выглядит как буква «Г» (возможно, повернутая); в оставшихся двух вариантах все три атома лежат на одной прямой — вертикальной или горизонтальной.

Далее, будем рассматривать нашу решетку не на всей плоскости, а на ее конечном участке, который мы будем считать квадратом со стороной n (то есть по каждой из сторон уместятся n атомов кислорода). Зададим также *граничные условия*: будем считать, что слева и справа от атомов кислорода, расположенных по левой и правой стороне квадрата соответственно, есть атомы водорода, а сверху и снизу от горизонтальных сторон квадрата никаких атомов нет (как показано на рис. 1.5). Тем самым количество атомов водорода как раз равно $2n^2$, то есть вдвое больше атомов кислорода. Ясно, что способов соединить каждый из атомов кислорода с двумя соседними атомами водорода достаточно много. На рис. 1.6 изображен один из таких способов.

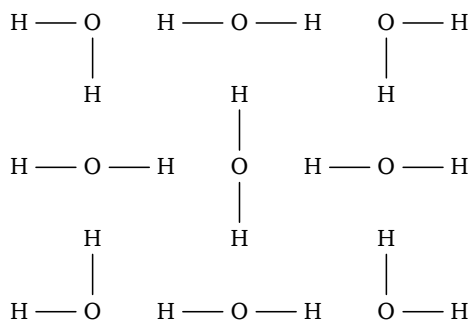


Рис. 1.6. Пример расстановки связей на решетке квадратного льда

Вместо рисования такой довольно громоздкой картинке можно поступить иначе: нарисовать лишь атомы кислорода и соседние атомы соединить стрелкой, направленной к тому из них, с которым связан находящийся между ними атом водорода. Так, по предыдущей картинке получится конфигурация стрелок, изображенная на рис. 1.7.

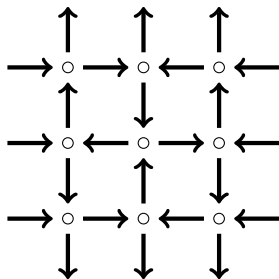


Рис. 1.7. Конфигурация стрелок, отвечающая «квадратному льду»

Мы получили уже известную нам конфигурацию, по которой можно построить знакопередающуюся матрицу, как это было сделано в доказательстве леммы 1.1. Для этого пройдем вдоль горизонталей и отметим все вершины, где стрелки меняют направление. В «стоках» расставим единицы, а в «источниках» — минус единицы. Ту же расстановку можно получить и проходя по вертикалям: в этом случае уже «стокам» будут соответствовать минус единицы, а «источникам» — единицы. В качестве несложного упражнения читатель может убедиться в том, что эти две расстановки будут одинаковыми.

Обратите внимание, что граничные условия, утверждающие, что атомы водорода присутствуют слева и справа от граничных атомов кислорода, но отсутствуют сверху и снизу, соответствуют тому, что стрелки с левого и правого края направлены вовнутрь, а с верхнего и нижнего — наружу (см. раздел 1.2). Для знакопередающей матрицы это будет отвечать тому, что первый и последний ненулевые элементы в каждой строке и каждом столбце являются единицами, а не минус единицами.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Постройте обратное отображение: убедитесь, что по каждой знакопередающей матрице можно восстановить конфигурацию стрелок, удовлетворяющую данным граничным условиям.

УКАЗАНИЕ. Каждая строка и каждый столбец знакопередающей матрицы определяют расстановку горизонтальных и вертикальных стрелок соответственно. Остается проверить корректность.

Из этого упражнения и предложения 1.2 следует, что соответствие между конфигурациями стрелок и знакопередающимися матрицами является биекцией.

Конечно же, знакопередающуюся матрицу можно «увидеть» уже на рис. 1.6 следующим образом. Каждый атом кислорода отвечает элементу знакопередающейся матрицы, который равен 0, если молекула, в которую входит этот атом, имеет форму буквы «Г», равен 1, если молекула горизонтальна, и равен -1 , если она вертикальна. Тем самым конфигурации из предыдущего примера будут отвечать уже известная нам матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знакопередающиеся матрицы также независимо возникли в работе американских математиков Миллса, Роббинса и Рамси, которые в начале 1980-х гг. изучали деформации определителя матрицы (так называемые λ -определители). Более подробно об этом можно прочесть в брошюре [6] или книге [8]. Многочисленные компьютерные эксперименты позволили Миллсу, Роббинсу и Рамси сформулировать знаменитую *гипотезу о знакопередающихся матрицах* (по-английски — *alternating sign matrix conjecture*, или, короче, *ASM-conjecture*).

ГИПОТЕЗА О ЗНАКОПЕРЕДАЮЩИХСЯ МАТРИЦАХ. Количество знакопередающихся матриц размера $n \times n$ равняется

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-2)!}{n!(n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}.$$

Эта гипотеза оставалась открытой в течение более 10 лет. В 1995 г. она была доказана Дореном Зейльбергером [21]. Доказательство было изложено на 84 страницах и было чрезвычайно сложным; его проверка заняла несколько лет и потребовала усилий 88 рецензентов. Годом позже в работе [16] появилось второе доказательство, уже гораздо более простое; оно принадлежало Грегу Купербергу и существенно опиралось на некоторые утверждения из математической физики (тогда как доказательство Зейльбергера было чисто комбинаторным).

1.5. Функция высоты

В этом разделе мы для каждого замощения плоскости доминошками построим некоторую функцию на решетке, которую будем называть функцией высоты.

Итак, пусть G — граф, вершинами которого являются узлы квадратной решетки на плоскости, а ребрами — отрезки, соединяющие сосед-

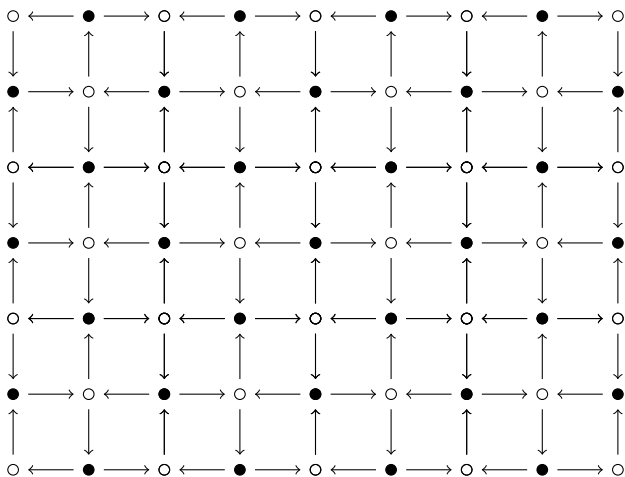


Рис. 1.8. Расстановка стрелок

ние узлы. Рассмотрим раскраску вершин графа G в шахматном порядке в черный и белый цвета, которую мы уже использовали при построении знаочередующихся матриц: напомним, что при этом мы условились, что вершина с координатами $(-n, 0)$ является белой. Расставим на единичных отрезках между соседними узлами стрелки следующим образом: если отрезок горизонтален, направим стрелку от черного узла к белому; если же он вертикален, то от белого к черному. Таким образом, из четырех ребер, прилегающих к каждой вершине, два будут входящими, а два исходящими, причем входящие и исходящие ребра будут чередоваться (см. рис. 1.8). Кроме того, граница каждого из единичных квадратиков будет ориентирована по циклу: либо по часовой стрелке, либо против.

Пусть нам дано некоторое замощение плоскости доминошками, которое мы обозначим через T . Представим себе, что доминошки выложены поверх графа G . Тогда каждая из них закрывает одно ребро графа. Удалим из графа ребра, закрытые доминошками; тот граф, который останется, будем обозначать G_T .

Сопоставим замощению его функцию высоты¹ — это будет функция на вершинах графа G , которую мы будем обозначать H_{T, v_0} . Определим ее следующим образом. Выберем произвольную вершину v_0 и положим

¹Почему функция высоты так называется, станет ясно в разделе 4.1, где пойдет речь о замощениях на треугольной решетке.

ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем в графе G_T . Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходит либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_{T,v_0}(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Предложение 1.3. 1) Так определенное значение функции высоты $H_{T,v_0}(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v .

2) В результате другого выбора начальной вершины функция высоты изменяется во всех точках на одну и ту же константу:

$$H_{T,v_0}(v) - H_{T,v'_0}(v) = H_{T,v_0}(v'_0).$$

Доказательство. 1) Для любого пути γ обозначим через H_γ разницу количества попутных и противоположно направленных стрелок при проходе вдоль него. Рассмотрим два пути γ_1 и γ_2 , соединяющие v_0 с v . Докажем, что значения функции высоты в v , построенные по путям γ_1 и γ_2 , равны — иными словами, что $H_{\gamma_1} = H_{\gamma_2}$. Для этого рассмотрим замкнутый контур γ_3 , получающийся, если мы сначала пройдем от v_0 к v по первому пути, а потом вернемся из v в v_0 вдоль второго, пройдя его в обратном направлении. При прохождении пути в обратном направлении вклад каждой стрелки изменяет знак, поэтому $H_{\gamma_3} = H_{\gamma_1} - H_{\gamma_2}$. Мы хотим доказать, что $H_{\gamma_3} = 0$. На самом деле мы докажем, что для любого замкнутого пути γ в графе G_T выполнено $H_\gamma = 0$.

Для этого сначала разрежем наш путь на несколько простых (т. е. несамопересекающихся) замкнутых путей (при необходимости удалив все стрелки, которые проходятся дважды в противоположных направлениях). Легко видеть, что при разрезании замкнутого пути γ на γ' и γ'' имеем $H_\gamma = H_{\gamma'} + H_{\gamma''}$; тем самым достаточно доказать наше утверждение для несамопересекающегося контура.

Без ограничения общности предположим, что наш контур γ обходит против часовой стрелки. Рассмотрим доминошки, лежащие внутри контура, и пусть $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ — замкнутые пути, отвечающие обходу их границ против часовой стрелки. Заметим, что тогда $H_\gamma = H_{\gamma'_1} + \dots + H_{\gamma'_n}$. Действительно, ребра, составляющие контур γ , будут в правой части посчитаны ровно один раз, а лежащие внутри него будут посчитаны дважды с противоположными знаками и поэтому сократятся, как показано на рис. 1.9.

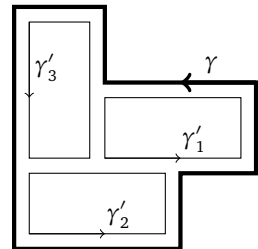


Рис. 1.9. Обход контура равносильен обходу всех входящих в него доминошек

Но на границе любой доминошки три стрелки идут по часовой, а три против часовой стрелки, поэтому все слагаемые H_{γ_j} равны нулю. Первая часть предложения доказана.

2) Утверждение следует из того, что всякий путь из v_0 в v можно заменить на пару путей, проходимых друг за другом, первый из которых будет соединять v_0 с v'_0 , а второй — v'_0 с v . Тем самым мы получим, что $H_{T, v_0}(v) = H_{T, v_0}(v'_0) + H_{T, v'_0}(v)$, что и требовалось. \square

Замечание. Подобное рассуждение используется при доказательстве очень многих утверждений: теоремы об индексе векторного поля, формулы Стокса, критерия потенциальности поля в физике и т. д. Даже в нашем рассказе оно встретится еще один раз, при доказательстве предложения 1.6.

В дальнейшем мы не будем указывать явную зависимость функции высоты от выбора начальной точки v_0 — хотя в конкретных примерах мы будем выбирать начальную точку удобным нам образом. На самом деле функцию высоты можно считать определенной с точностью до константы, подобно тому, как определяется первообразная функции в математическом анализе (советуем читателю обдумать эту аналогию самостоятельно).

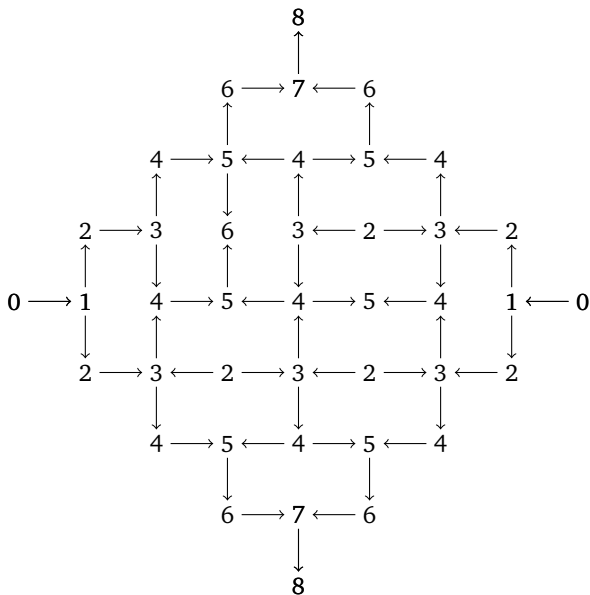


Рис. 1.10. Замощение и его функция высоты

ПРИМЕР. На рис. 1.10 показано замощение ацтекского бриллианта (то же самое, что и на рис. 1.4) и соответствующая ему функция высоты. Контрольный вопрос: как ведет себя функция высоты на оставшейся части плоскости, если замощение продолжено вне ацтекского бриллианта регулярным образом?

Следующее свойство функции высоты очевидно, но в силу его важности мы сформулируем его в виде отдельного предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть u и v — две соседние вершины, соединенные в графе G ребром, направленным от u к v , а T — некоторое замощение. Тогда либо $H_T(v) = H_T(u) + 1$, либо $H_T(v) = H_T(u) - 3$. В первом случае ребро uv принадлежит графу G_T , т. е. является частью границы некоторой доминошки, а во втором — нет, и, таким образом, оказывается закрытым одной из доминошек.

Из предложения 1.4 немедленно вытекает такое следствие:

СЛЕДСТВИЕ. 1) Для любых двух вершин, расположенных в противоположных углах единичного квадрата, разность функций высоты равна ± 2 .

2) Для любых двух замощений T и T' их функции высоты сравнимы по модулю 4: для любой вершины v выполнено сравнение $H_{T,v_0}(v) \equiv H_{T',v_0}(v) \pmod{4}$.

Оказывается, предложение 1.4 является не только необходимым, но и достаточным условием: замощение можно однозначно восстановить по его функции высоты.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G , удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин u и v , ребро между которыми направлено от u к v , либо $H(v) = H(u) + 1$, либо $H(v) = H(u) - 3$. Тогда $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность следует из такого соображения. Пусть H — функция высоты некоторого замощения T . Рассмотрим те ребра, разность значений H на концах которых равна единице. Эти ребра будут образовывать границы доминошек нашего замощения; напротив, те ребра, разность функций высоты на концах которых равна минус трем, будут закрыты доминошками. Тем самым если замощение существует, оно определено однозначно.

Далее, докажем существование такого замощения. Возьмем какую-нибудь клетку. Все стрелки на ее границе направлены по циклу: либо по часовой стрелке, либо против. Поскольку сумма приращений функции высоты при обходе этой клетки равна нулю, это значит, что существует ровно три ребра из четырех, для которых разность значений функции высоты на их концах равна единице, и одно ребро, для которого эта

разность равна минус трем; оно и будет закрыто доминошкой. То же самое можно будет сказать и про клетку, смежную с данной по этому ребру. Тем самым все клетки окажутся разбитыми на пары, то есть в итоге действительно получится замощение ацтекского бриллианта. \square

Замечание. Теорема 1.1 верна не только для всей плоскости, но и для произвольной плоской фигуры «без дырок» (как говорят топологи, *односвязной* фигуры). Для таких фигур можно определить функцию высоты замощения, которая будет задавать замощение однозначным образом (при выполнении описанных в теореме условий). Разумеется, от функции высоты при этом еще надо дополнительно потребовать, чтобы ее приращение на любом отрезке границы фигуры равнялось бы единице. Напротив, для фигур с дырками нельзя даже просто определить функцию высоты замощения. В качестве примера можно рассмотреть квадрат 3×3 с вырезанной центральной клеткой. Читатель легко проверит, что для этой фигуры не будет выполняться предложение 1.3.

Вернемся к ацтекскому бриллианту. Пусть у нас имеется замощение T ацтекского бриллианта порядка n , продолженное на всю плоскость регулярным образом. Выберем точку $v_0 = (-n - 1, 0)$ (она будет черной) и рассмотрим функцию высоты H_{T,v_0} , равную нулю в этой точке. Далее мы будем обозначать эту функцию просто через H_T , не указывая начальную вершину.

Назовем *границей* ацтекского бриллианта множество вершин замощения, лежащих на двух квадратах: на «черном» квадрате, заданном уравнением $|x| + |y| = n + 1$, и на «белом» квадрате $|x| + |y| = n$. В следующем предложении говорится о том, чему равна функция высоты на границе; предлагаем читателю проверить его самостоятельно.

Предложение 1.5. *В черных точках границы $H_T(x, y) = 2|y|$. В белых точках границы $H_T(x, y) = 2|y| - 1$.*

В дальнейшем мы (аналогично замечанию выше) будем рассматривать функцию высоты ацтекского бриллианта только в пределах этой границы — то есть квадрата $|x| + |y| \leq n + 1$. Поведение функции высоты за пределами этого квадрата нас интересовать не будет.

1.6. Построение замощения по знакочередующейся матрице

В предыдущих разделах мы научились сопоставлять замощению две знакочередующиеся матрицы, A и B , порядка $n + 1$ и n соответственно. Сейчас мы попробуем ответить на следующий вопрос: насколько точно можно восстановить замощение, зная лишь одну из этих двух матриц (скажем, A)? Для этого мы попробуем что-либо сказать не о самом замощении, а о его функции высоты.

Итак, пусть A — произвольная знакопередающая матрица порядка $n + 1$; по построению из раздела 1.1, ее элементы отвечают белым вершинам. Как мы знаем, каждая такая знакопередающая матрица взаимно однозначно соответствует конфигурации стрелок, соединяющих белые вершины (на рисунках эти стрелки изображены жирными сплошными линиями). При этом стрелки удовлетворяют граничным условиям, описанным в конце раздела 1.1, а также условию сбалансированности: в каждую вершину входят и из каждой вершины исходят по две стрелки. Наша ближайшая цель — построить по этой матрице функцию в черных вершинах решетки, которая в конечном итоге будет продолжена до функции высоты некоторого замощения.

Для этого повернем каждую из стрелок на 90° по часовой стрелке. Результат будем изображать пунктирными стрелками, которые уже будут соединять пары черных вершин. Смысл полученного набора пунктирных стрелок в следующем: если исходная матрица A соответствовала какому-то замощению, то разность значений функции высоты в двух соседних (по диагонали) черных вершинах равна ± 2 . Оказывается, что так заданные пунктирные стрелки всегда указывают от меньшего значения к большему (проверьте это утверждение самостоятельно). На рис. 1.11 показана конфигурация пунктирных стрелок, полученная таким образом из набора сплошных стрелок с рис. 1.2.

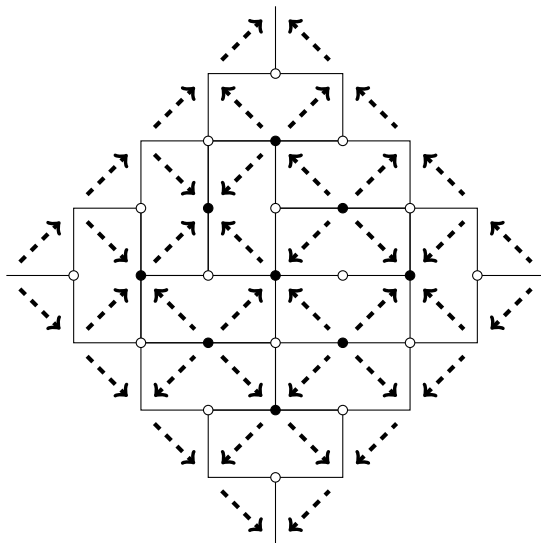


Рис. 1.11. Набор пунктирных стрелок, отвечающий конфигурации с рис. 1.2

Предложение 1.6. Для определенной таким образом конфигурации пунктирных стрелок существует функция $H_A(v)$ на множестве черных вершин, для которой разность значений в конце u и в начале любой пунктирной стрелки равна 2, а значение в точке $(-n - 1, 0)$ равно нулю.

Доказательство. Пусть v — произвольная вершина. Рассмотрим путь, проходящий по пунктирным стрелкам и соединяющий вершину $(-n - 1, 0)$ с v . Положим значение $H_A(v)$ равным удвоенной разности между количеством попутных и противоположно направленных стрелок, входящих в этот путь.

Осталось доказать, что значение функции $H_A(v)$ не зависит от выбора пути. Для этого, аналогично предложению 1.3, достаточно показать, что любой замкнутый контур, проходящий по пунктирным стрелкам, содержит поровну попутных и противоположно направленных стрелок. Опять-таки аналогично доказательству предложения 1.3 мы замечаем сначала, что достаточно доказать это для любого простого контура. А для этого достаточно установить это для любого элементарного квадрата с углами в соседних черных вершинах, т. к. приращение при обходе простого контура будет суммой приращений при обходе ограниченных им квадратов.

Наконец, заметим, что из четырех пунктирных стрелок, образующих элементарный квадратик, две направлены по часовой стрелке, а две — против: это следует из того, что из четырех сплошных стрелок, касающихся белой вершины — центра квадрата — две направлены к этой вершине, а две от нее.

Предложение доказано. \square

Тем самым по произвольной знакочередующейся матрице мы построили некоторую функцию в черных вершинах. Докажем, что теперь ее можно доопределить в белых вершинах таким образом, чтобы она оказалась функцией высоты некоторого замощения, причем количество способов сделать это равняется $2^{N_-(A)}$, где $N_-(A)$ — число минус единиц в матрице A .

Вернемся к конфигурации сплошных стрелок, которая взаимно однозначно соответствует матрице A . В каждую из белых вершин входит и выходит по две стрелки, которые могут располагаться одним из шести способов, показанных на рис. 1.12. На том же рисунке видно, что в первых пяти случаях значение (гипотетической) функции высоты в центральной белой вершине восстанавливается однозначно, а для шестого расположения стрелок существует два варианта значения функции высоты в центральной вершине. Соответственно замощение в окрестности белой вершины также либо определено однозначно

(первые пять конфигураций), либо для него есть два варианта (последняя конфигурация). Шестое расположение стрелок отвечает в точности тому, что соответствующий элемент знакопередающей матрицы равен минус единице.

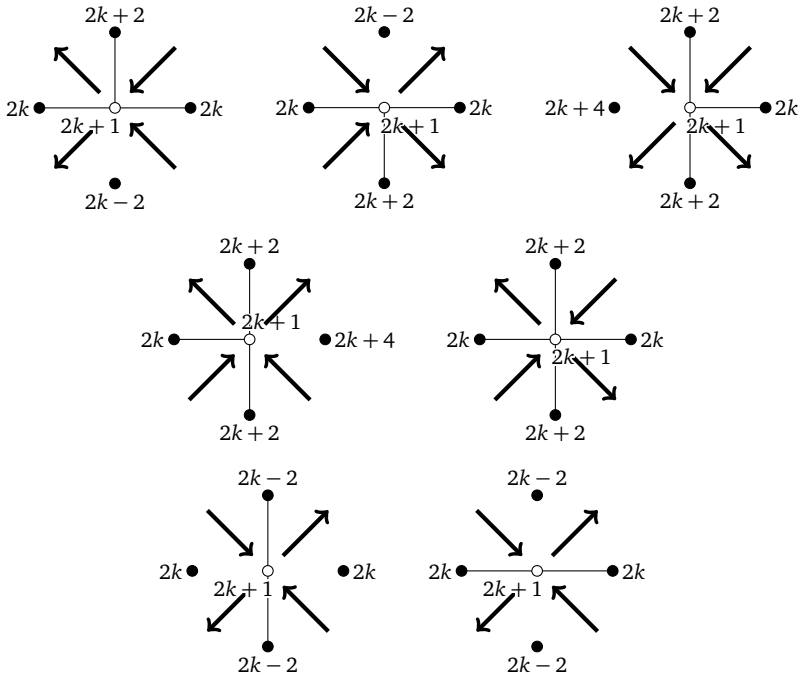


Рис. 1.12. Восстановление функции высоты в центральной вершине

По построению и по теореме 1.1 каждая определенная таким образом в черных и белых вершинах функция будет являться функцией высоты некоторого замощения. Мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для каждой знакопередающей матрицы A , соответствующей белым вершинам замощения, число замощений, отвечающих этой матрице, равно $2^{N_-(A)}$, где $N_-(A)$ — число минус единиц в матрице A .*

То же самое рассуждение можно провести, стартовав с матрицы B и восстанавливая замощение по ней. Напомним только, что определение матрицы B отличалось от определения матрицы A знаком: единицы и минус единицы в матрице B соответствуют черным вершинам, где сходятся соответственно две и четыре доминошки, тогда как для

матрицы A дело обстоит наоборот. Приняв это во внимание, получаем «двойственное» утверждение:

ТЕОРЕМА 1.3. *Для каждой знакопередающей матрицы B , соответствующей черным вершинам замощения, число замощений, отвечающих этой матрице, равно $2^{N_+(B)}$, где $N_+(B)$ — число единиц в матрице B .*

1.7. Завершение доказательства теоремы об ацтекском бриллианте

Обозначим через $AD(n)$ число замощений ацтекского бриллианта порядка n . Также обозначим через \mathcal{A}_n множество знакопередающих матриц порядка n . Из теорем 1.2 и 1.3 вытекают два соотношения, связывающие число замощений ацтекского бриллианта со множеством знакопередающих матриц.

СЛЕДСТВИЕ. *Имеют место соотношения*

$$AD(n) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{n+1}} 2^{N_-(A)} \quad \text{и} \quad AD(n) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_+(B)}.$$

Доказательство. Мы сопоставили каждому замощению знакопередающую матрицу $A \in \mathcal{A}_{n+1}$. При этом, согласно теореме 1.2, каждая матрица A соответствует ровно $2^{N_-(A)}$ различным замощениям. Это и утверждает первое равенство. Второе соотношение доказывается аналогично. \square

Теперь еще раз возьмем первое из полученных соотношений и заменим в нем n на $n - 1$, а также переобозначим параметр суммирования: будем обозначать его через B . Мы получим, что

$$AD(n - 1) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_-(B)}.$$

Заметим, что разность числа плюс единиц и минус единиц в знакопередающей матрице всегда равна порядку матрицы:

$$N_+(B) = n + N_-(B).$$

Тогда получаем, что

$$AD(n) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_+(B)} = 2^n \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_-(B)} = 2^n AD(n - 1).$$

А отсюда уже следует теорема об ацтекском бриллианте: поскольку $AD(1) = 2$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} AD(n) &= 2^n AD(n - 1) = 2^n \cdot 2^{n-1} AD(n - 2) = \dots \\ &\dots = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n+(n-1)+\dots+2+1} = 2^{n(n+1)/2}. \end{aligned}$$

Теорема об ацтекском бриллианте доказана.

Взгляд второй: совершенные паросочетания на графах

2.1. Совершенные паросочетания и замощения

Пусть Γ — произвольный граф (абстрактный, без каких-либо условий на связность, планарность и т. п.). *Совершенное паросочетание* (по-английски *perfect matching*) — это такой способ разбить все вершины на пары, при котором вершины в каждой паре оказываются соединены ребром. Иными словами, совершенное паросочетание — это подмножество $M \subset E(\Gamma)$ ребер графа, обладающее следующим свойством: из каждой вершины графа исходит ровно одно ребро из подмножества M .

Между замощениями фигур с помощью доминошек и совершенными паросочетаниями на графах существует очевидная связь: для произвольной фигуры на клетчатой бумаге можно рассмотреть ее *двойственный граф*. Вершины этого графа будут соответствовать клеточкам; в случае, если две клеточки смежны, вершины будут соединены ребром. Тогда замощение фигуры доминошками есть не что иное, как совершенное паросочетание двойственного графа.

В качестве примера на рис. 2.1 изображено замощение ацтекского бриллианта порядка 2 и отвечающее ему совершенное паросочетание на двойственном графе.

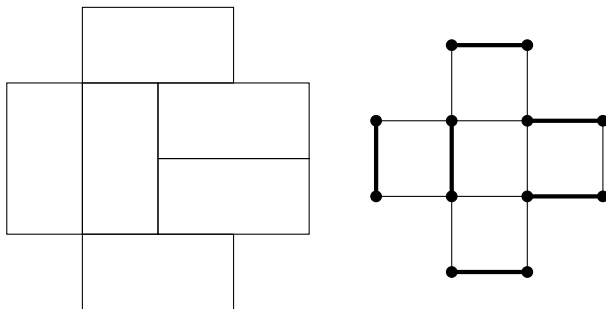


Рис. 2.1. Замощение и паросочетание

Таким образом, число замощений ацтекского бриллианта порядка n оказывается равным числу совершенных паросочетаний двойственно-

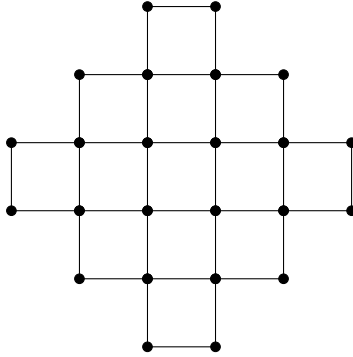


Рис. 2.2. Граф, отвечающий ацтекскому бриллианту порядка 3

го к нему графа, который мы будем обозначать через $\mathcal{A}\mathcal{D}_n$ (на рис. 2.2 в качестве примера изображен граф $\mathcal{A}\mathcal{D}_3$).

2.2. Взвешенные суммы

Предположим, что граф Γ является *взвешенным*: на каждом его ребре $e \in E(\Gamma)$ написан *вес*, т. е. некоторое выражение $\text{wt } e$ (число или многочлен от каких-либо переменных). *Весом* совершенного паросочетания M будем называть произведение весов всех входящих в него ребер:

$$\text{wt } M = \prod_{e_i \in M} \text{wt } e_i.$$

Следующее определение для нас будет являться ключевым. Для данного графа Γ определим его *статистическую сумму* (или, как еще говорят, *статсумму*) $Z(\Gamma)$ как сумму весов его всевозможных совершенных паросочетаний:

$$Z(\Gamma) = \sum_M \text{wt } M.$$

Пример. Пусть Γ — квадрат, на ребрах которого расставлены веса x , y , z и w , как показано на рис. 2.3. Тогда для Γ имеются ровно два совершенных паросочетания, образованные парами противоположных сторон квадрата, и статистическая сумма графа Γ равняется

$$Z(\Gamma) = xz + yw.$$

Ясно, что если все веса на ребрах графа Γ равны единице, то $Z(\Gamma)$ равняется числу совершенных паросочетаний. Поэтому наша цель — найти статистическую сумму $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_n)$ для ацтекского бриллианта $\mathcal{A}\mathcal{D}_n$,

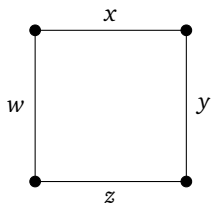


Рис. 2.3. Статсумма этого графа равна $xz + uw$

все веса на ребрах которого равны единице. Мы сделаем это, сведя вычисление этой функции к вычислению $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1})$ при помощи различных манипуляций с исходным графом, при которых статсумма будет меняться контролируемым образом. Для этого нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

2.3. Лемма о расширении площадей

Предположим, что в графе Γ имеется подграф из восьми вершин, изображенный на рис. 2.4 слева. При этом требуется, чтобы ни одна из вершин внутреннего квадрата (обозначим их через A' , B' , C' и D') не была бы соединена более ни с какими вершинами; напротив, четыре внешние вершины A , B , C и D могут быть соединены с какими-либо из вершин, не входящих в указанный фрагмент. Также предположим, что между этими восемью вершинами нет никаких других ребер, кроме

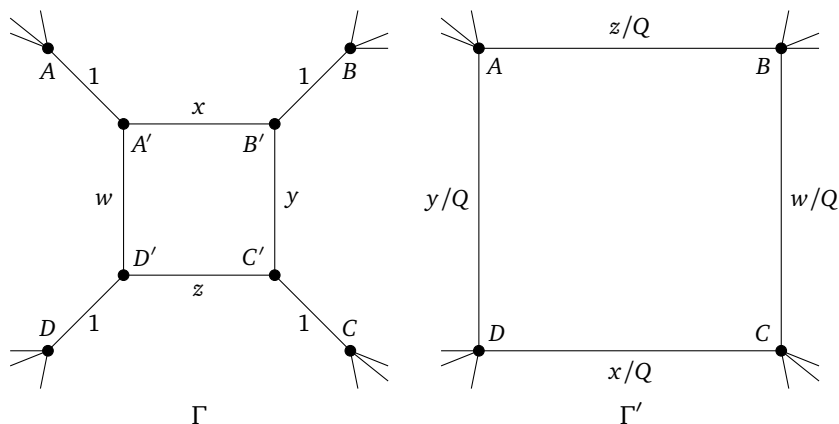


Рис. 2.4. Лемма о расширении площадей

тех восьми, которые изображены на рисунке. Кроме того, пусть веса на ребрах расставлены так, как указано на рисунке: ребра, соединяющие «внешние» и «внутренние» вершины, имеют вес 1, а веса на ребрах внутреннего квадрата произвольны (обозначим их через x , y , z и w).

Произведем с графом Γ следующие преобразования: заменим в нем этот фрагмент на квадрат $ABCD$. При этом мы считаем, что все ребра, соединяющие «внешние» вершины с вершинами, не входящими в этот фрагмент, остаются без изменений. Расставим веса на ребрах этого квадрата так, как показано на рис. 2.4 справа: поменяем местами веса на противоположных ребрах и поделим все веса на величину $Q = xz + uw$. Получившийся граф обозначим через Γ' . Следующая лемма утверждает, что статсумма этого графа отличается от $Z(\Gamma)$ в Q раз.

ЛЕММА О РАСШИРЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ. Имеет место равенство

$$Z(\Gamma') = \frac{Z(\Gamma)}{Q}.$$

Доказательство. Рассмотрим какое-либо совершенное паросочетание M в графе Γ . Посмотрим, каким ребрам из этого паросочетания принадлежат вершины A , B , C и D . Для каждой из этих вершин реализуется одна из двух ситуаций: она может быть соединена либо с одной из «наружных» вершин, либо с одноименной «внутренней» (штрихованной) вершиной. Итого а priori получается $2^4 = 16$ вариантов; однако из них реализуются не все, а лишь шесть. Действительно, легко заметить, что количество вершин, соединенных «наружу», обязательно должно быть четно — то есть таких вершин либо четыре, либо ни одной (это два варианта), либо две. Кроме того, если их две, то эти вершины обязательно должны быть соседними. Рассмотрим все эти ситуации по отдельности.

а) Пусть две вершины (без ограничения общности считаем, что это A и B) соединены с «наружными» вершинами, а C и D , напротив, соединены соответственно с C' и D' . Это значит, что между вершинами A' и B' также имеется ребро. Итак, вес паросочетания M равен

$$\text{wt } M = x \cdot \text{wt } M^{\text{out}},$$

где $\text{wt } M^{\text{out}}$ — произведение весов всех «внешних» ребер, т. е. ребер, не входящих в рассматриваемый фрагмент.

Сопоставим паросочетанию M совершенное паросочетание M' в графе Γ' , построенное следующим образом: вместо ребер $A'B'$, CC' и DD' в него будет входить ребро CD ; остальные ребра останутся без изменений. (Заметим, что при этом действительно получится паросочетание — из каждой вершины будет исходить ровно одно ребро). Вес

паросочетания M' будет равен

$$\text{wt } M' = \text{wt}(CD) \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = \frac{x}{Q} \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = \frac{\text{wt } M}{Q}.$$

Получаем, что паросочетанию M в старом графе сопоставлено паросочетание M' в новом графе, вес которого в Q раз меньше.

б) Пусть паросочетание M таково, что все вершины A, B, C, D соединены с одноименными штрихованными вершинами. Веса ребер AA', BB', CC' и DD' равны единице, так что вес паросочетания M равен произведению весов всех ребер за пределами рассматриваемого нами участка графа: $\text{wt } M = \text{wt } M^{\text{out}}$. Сопоставить такому паросочетанию одно паросочетание подходящего веса в графе Γ' , как это было сделано в предыдущем случае, уже не получится — однако ему можно сопоставить два совершенных паросочетания. Пусть первое из них, M' , получается из M заменой четырех «диагональных» ребер на ребра AB и CD . Вес такого паросочетания равен

$$\text{wt } M' = \frac{z}{Q} \cdot \frac{x}{Q} \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = \frac{xz}{Q^2} \cdot \text{wt } M.$$

Второе паросочетание, которое мы обозначим M'' , получается заменой в M' ребер AB и CD на пару других противоположных ребер: AD и BC . Его вес равен

$$\text{wt } M'' = \frac{yw}{Q^2} \cdot \text{wt } M.$$

Таким образом, мы сопоставили совершенному паросочетанию M два совершенных паросочетания M' и M'' , суммарный вес которых равен

$$\text{wt } M' + \text{wt } M'' = \frac{xz + yw}{Q^2} \cdot \text{wt } M = \frac{\text{wt } M}{Q}.$$

То есть их суммарный вес опять-таки в Q раз меньше, чем вес M .

в) Наконец, последний случай: пусть все вершины A, B, C, D соединены с внешними вершинами. Тогда совершенное паросочетание M в интересующем нас фрагменте может быть устроено одним из двух способов: в него могут либо входить ребра $A'B'$ и $C'D'$ (назовем это паросочетание M_1), либо $A'D'$ и $B'C'$ (назовем его M_2). Этим двум паросочетаниям мы сопоставим одно совершенное паросочетание M' в графе Γ' ; оно будет устроено единственно возможным способом, т. е. в него не будут входить ребра из квадрата $ABCD$. Аналогично предыдущим случаям получаем, что

$$\text{wt } M_1 + \text{wt } M_2 = (xz + yw) \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = Q \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = Q \cdot \text{wt } M'.$$

Итак, мы разбили всевозможные совершенные паросочетания в графе Γ на наборы из одного или двух элементов и для каждого набора

нашли другой набор совершенных паросочетаний в графе Γ' (также из одного или двух элементов), обладающий следующим свойством: суммарный вес второго набора в $Q = xz + yw$ раз меньше, чем суммарный вес первого набора.

Тем самым мы доказали равенство

$$Z(\Gamma') = \frac{Z(\Gamma)}{xz + yw}. \quad \square$$

2.4. Подсчет числа совершенных паросочетаний ацтекского бриллианта

В этом разделе мы, как и было обещано, вычислим $Z(\mathcal{AD}_n)$, где \mathcal{AD}_n — граф, отвечающий ацтекскому бриллианту порядка n . Все веса на ребрах этого графа мы полагаем равными единице.

Сделаем с графом \mathcal{AD}_n следующее преобразование: заменим каждую его вершину на три вершины, соединенные между собой двумя ребрами, как это показано на рис. 2.5. В результате получим «утроенный» граф \mathcal{AD}_n^3 .

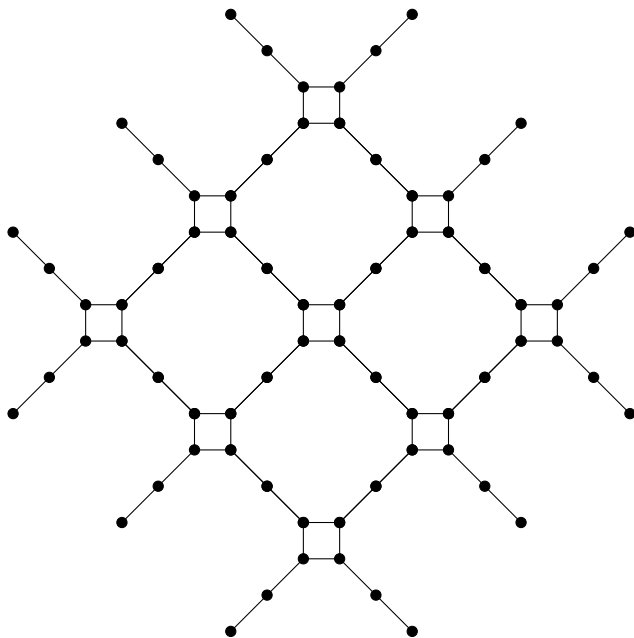


Рис. 2.5. Ацтекский бриллиант с утроенными вершинами

Оказывается, «утроение» вершин никак не влияет на статсумму графа:

Предложение 2.1. *Статсуммы исходного и «утроенного» графа равны: $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_n) = Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_n^3)$.*

Упражнение 2.1. Докажите это предложение, построив биекцию между множествами совершенных паросочетаний этих графов.

Теперь настало время применить к «утроенному» графу лемму о расширении площадей. А именно, мы применим ее к каждому из n^2 маленьких квадратиков, из вершин которого выходят четыре диагональных ребра. Граф, полученный в результате, показан на рис. 2.6; обратите внимание, что все его ребра, кроме диагональных «усов», уже будут иметь вес $1/2$ (такие ребра отмечены на рисунке пунктиром; сплошные ребра, как обычно, имеют вес 1).

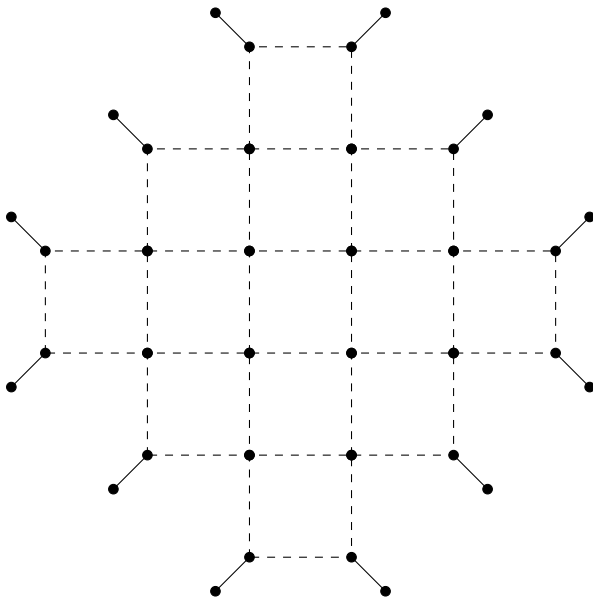


Рис. 2.6. Утроенный ацтекский бриллиант после преобразования

Обозначим этот граф $\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{D}_n}$. Лемма о расширении площадей позволяет найти его статсумму. Действительно, каждое применение леммы уменьшает статсумму вдвое, а всего мы ее применили n^2 раз. Значит,

$$Z(\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{D}_n}) = \frac{Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_n)}{2^{n^2}}. \quad (*)$$

Что можно сказать о совершенных паросочетаниях графа $\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{D}}_n$? Ясно, что в каждое паросочетание будут входить все $4n$ «усов» — т. е. ребер веса 1. На значение статсуммы они не влияют. Поэтому все эти ребра и смежные с ними вершины можно просто удалить — и статсумма оставшегося графа будет равна $Z(\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{D}}_n)$. Но граф, который останется при этом, будет ацтекским бриллиантом на единицу меньшего порядка, все ребра которого будут иметь вес $1/2$.

Мы почти у цели: выясним, чему равна статистическая сумма ацтекского бриллианта $\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1}$, все ребра в котором имеют вес $1/2$. Она меньше $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1})$ в 2^N раз, где N — число ребер в совершенном паросочетании, т. е. половина числа вершин графа. А в ацтекском бриллианте порядка $n - 1$ всего $2n(n - 1)$ вершин — стало быть, интересующая нас сумма равна $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1})/2^{n(n-1)}$. Итак,

$$Z(\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{D}}_n) = \frac{Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1})}{2^{n(n-1)}}.$$

Сравнив полученное с равенством (*), мы получаем, что

$$Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_n) = \frac{2^{n^2}}{2^{n(n-1)}} \cdot Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1}) = 2^n Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1}).$$

Таким образом, число замощений ацтекского бриллианта порядка n в 2^n раз больше числа замощений бриллианта порядка $n - 1$. А отсюда и из равенства $Z(\mathcal{A}\mathcal{D}_1) = 2$ получается второе доказательство теоремы об ацтекском бриллианте.

Взгляд третий: числа Шрёдера и непересекающиеся пути

3.1. Числа Шрёдера

Пусть n — целое неотрицательное число. Рассмотрим ломаные (пути) на координатной плоскости из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, составленные из векторов $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(2, 0)$ и лежащие (не строго) выше оси абсцисс. Такие пути называются *путями Шрёдера*, а их число — соответственно n -м *числом Шрёдера*; мы будем обозначать его через r_n .

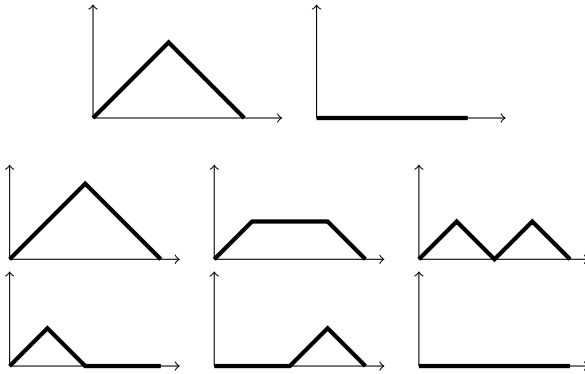


Рис. 3.1. Пути Шрёдера для $n = 1$ и $n = 2$

ПРИМЕР. На рис. 3.1 изображены все пути Шрёдера для $n = 1$ и 2 : их оказывается два и шесть соответственно.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Возможно, читателю известны *пути Дика*: это пути Шрёдера без горизонтальных звеньев. Число путей Дика длины $2n$ — это n -е *число Каталана*. Последовательность чисел Каталана — $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ — играет очень важную роль во многих комбинаторных задачах и имеет множество разных интерпретаций; так, Ричард Стенли в книге [7] и приложении к ней [19] приводит более двух сотен комбинаторных описаний этой последовательности! В той же книге можно найти и массу интересного о числах Шрёдера.

2. Пути Шрёдера можно рассматривать как пути не на целочисленной решетке, а на вдвое более редкой ее подрешетке: если взять сумму абсциссы и ординаты любого звена, входящего в путь Шрёдера, все

эти суммы будут иметь одинаковую четность (в частности, они будут четны, если путь Шрёдера исходит из начала координат).

Будем называть путь Шрёдера *малым*, если он пересекается с осью абсцисс лишь в конечном числе точек (иначе говоря, у него нет горизонтальных звеньев, проходящих на высоте 0). Число малых путей Шрёдера из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ будем обозначать через s_n ; это число называется *n -м малым числом Шрёдера*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Нарисуйте все малые пути Шрёдера из точки $(0, 0)$ в точку $(6, 0)$ (их должно получиться 11).

Из примера 3.1 видно, что при $n = 1$ один из путей будет малым, а другой — нет; при $n = 2$ малых путей будет три из шести. В обоих случаях число малых путей Шрёдера составляет ровно половину от общего числа путей. Оказывается, это не совпадение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. При $n > 0$ число малых путей Шрёдера вдвое меньше общего числа путей Шрёдера: $r_n = 2s_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем это, построив биекцию на множестве путей Шрёдера: каждому пути, не являющемуся малым, мы сопоставим малый путь Шрёдера, причем это соответствие окажется взаимно однозначным. Тем самым будет доказано, что тех и других путей поровну.

Рассмотрим путь, не являющийся малым. В нем есть горизонтальные звенья, проходящие на нулевой высоте. Возьмем самое правое из таких звеньев; пусть оно соединяет точки $(2k, 0)$ и $(2k + 2, 0)$ (его абсциссы будут четны в силу замечания 2). Удалим это звено и преобразуем с тем, что осталось, следующее преобразование. Все, что справа от этого звена, оставим без изменений; тот же отрезок пути, кото-

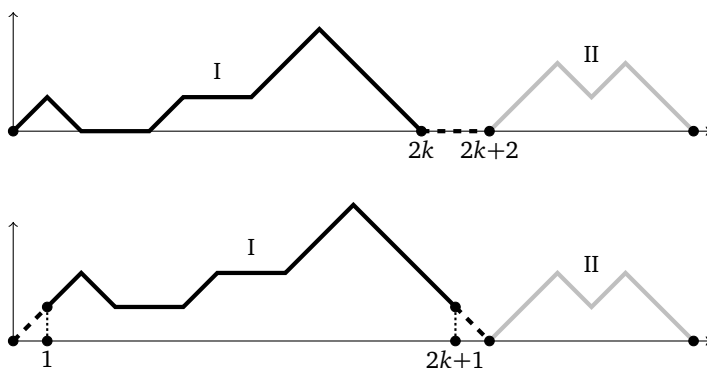


Рис. 3.2. Биекция на множестве путей Шрёдера

рый располагался слева от удаленного звена, сместим на вектор $(1, 1)$, то есть на единицу вправо и вверх. Мы получим путь из точки $(1, 1)$ в точку $(2k + 1, 1)$. Добавим к нему «ножки» — два наклонных звена $(0, 0) - (1, 1)$ и $(2k + 1, 1) - (2k + 2, 0)$ (они показаны на рис. 3.2 пунктиром). Полученный путь «склеится» с правой половиной исходного пути.

В итоге получится новый путь Шрёдера, который уже будет малым: действительно, если в исходном пути были другие горизонтальные звенья, они все были слева от того звена, которое мы удалили — то есть после нашего преобразования они поднялись на высоту 1. Тем самым из пути Шрёдера, не являющегося малым, мы изготовили малый путь Шрёдера. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Докажите, что полученное отображение действительно является биекцией (это легче всего сделать, описав обратное к нему отображение).

3.2. Наборы непересекающихся путей Шрёдера

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим наборы из n путей (π_1, \dots, π_n) , удовлетворяющих следующим условиям:

(1) π_i — путь Шрёдера, соединяющий точки оси абсцисс с координатами $-(2i - 1)$ и $2i - 1$ (т. е. путь π_1 идет из -1 в 1 , путь π_2 — из -3 в 3 , и так далее).

(2) Никакие два пути π_i и π_j не пересекаются (т. е. не имеют общих точек).

Пример такого набора путей изображен на рис. 3.3.

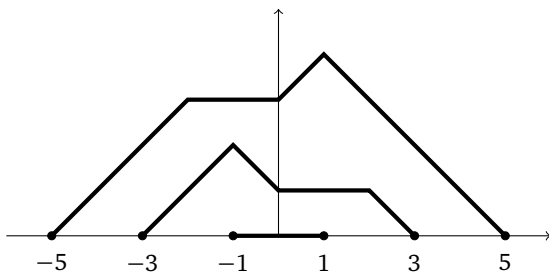


Рис. 3.3. Набор путей Шрёдера

Пусть H_n — количество таких наборов. Далее, через G_n обозначим количество таких наборов, в которых все пути π_1, \dots, π_n являются малыми.

Наша дальнейшая цель — вычислить H_n и G_n .

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь, что $H_1 = G_2 = 2$, а $H_2 = G_3 = 8$ (нарисуйте все такие наборы путей).

Нетрудно доказать и общее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Имеет место равенство $H_n = G_{n+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим биекцию: набору из n непересекающихся путей Шрёдера с концами в точках $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n - 1)$ сопоставим набор из $n + 1$ малого пути Шрёдера с концами в точках $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n + 1)$. Сделаем это следующим образом: сдвинем весь набор путей на 2 единицы вверх и дорисуем к каждому из путей диагональные «ножки», как показано на рис. 3.4. Получим набор путей, соединяющих между собой точки с абсциссами $\pm 3, \pm 5, \dots, \pm(2n + 1)$. Ясно, что все получившиеся таким образом пути будут малыми. Осталось только дорисовать единственный возможный малый путь из -1 в 1 . Биективность построенного отображения очевидна. \square

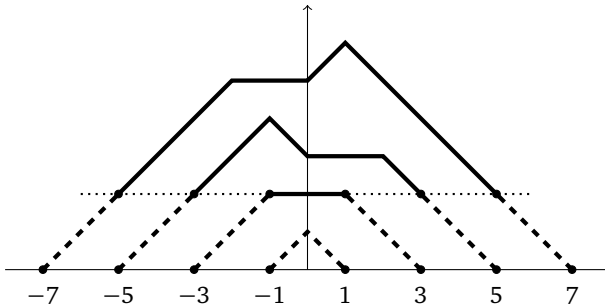


Рис. 3.4. Набор малых путей Шрёдера

Следующее соотношение доказывается несколько сложнее, однако при его доказательстве используется замечательный прием — метод непересекающихся путей Линдстрёма—Гесселя—Вьенно.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеет место равенство $H_n = 2^n G_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место следующее утверждение, которое мы докажем чуть позже.

ЛЕММА 3.1. *Числа H_n и G_n представляются в виде определителей матриц, элементами которых являются числа Шрёдера и малые числа Шрёдера соответственно:*

$$H_n = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n-1} \end{vmatrix}; \quad G_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Из этой леммы немедленно следует утверждение теоремы: действительно, поскольку каждый элемент первой матрицы — число Шрёдера — вдвое больше соответствующего элемента второй матрицы, т. е. малого числа Шрёдера с тем же номером, определители этих матриц отличаются в 2^n раз, где n — порядок матрицы. \square

С учетом того, что $H_1 = 2$ и $G_1 = 1$, отсюда легко найти общую формулу для этих чисел:

$$\text{Следствие. } H_n = 2^{n(n+1)/2}; G_n = 2^{n(n-1)/2}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать лемму 3.1.

Доказательство леммы 3.1. Докажем сначала первое равенство. Для этого представим определитель в правой части как сумму по перестановкам:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \dots r_{n-1+\sigma(n)}.$$

Проинтерпретируем каждое из слагаемых в терминах путей Шрёдера. А именно, $r_{\sigma(1)}$ — это количество путей Шрёдера, соединяющих точку -1 с точкой $2\sigma(1) - 1$; аналогично $r_{1+\sigma(2)}$ — число путей между точкой -3 и точкой $2\sigma(2) - 1$, ..., $r_{k-1+\sigma(k)}$ — число путей, соединяющих точку $-(2k - 1)$ (иначе говоря, k -ю по счету точку с нечетной отрицательной абсциссой, если считать от нуля влево) с точкой $2\sigma(k) - 1$ (т. е. с $\sigma(k)$ -й точкой с нечетной абсциссой, если считать от нуля вправо). Таким образом, $r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \dots r_{n-1+\sigma(n)}$ есть число наборов из n путей Шрёдера, в которых k -я «отрицательная» точка соединена путем с $\sigma(k)$ -й «положительной» точкой. Будем говорить, что такой набор путей *отвечает перестановке* σ . Отметим, что мы не налагаем никаких дополнительных условий на взаимное расположение этих путей: они могут пересекаться (более того, если σ не является тождественной перестановкой, пересечения обязательно будут), у них могут быть совпадающие участки и т. д.

Далее, рассмотрим множество всех наборов *пересекающихся* путей Шрёдера, отвечающих всевозможным перестановкам — иначе говоря, всех таких наборов, в которых какие-то два пути имеют общую точку. Определим на этом множестве инволюцию ι (т. е. отображение в себя, квадрат которого равен тождественному). Пусть дан некоторый набор путей, среди которых есть пересекающиеся. Пусть k — наименьший номер пути, который пересекается с каким-то другим путем (мы гово-

рим, что путь имеет номер k , если он исходит из точки $-(2k - 1)$). При этом k -й путь может пересекаться с несколькими путями; рассмотрим среди них тот, для которого точка пересечения с k -м путем расположена левее всего; если же таких путей несколько, выберем среди них путь с наименьшим номером. Обозначим этот номер через ℓ .

Теперь сопоставим нашему набору путей новый набор по следующему правилу. Возьмем самую левую точку пересечения k -го и ℓ -го путей и поменяем после нее пути местами: в качестве нового k -го пути возьмем путь, совпадающий с k -м левее точки пересечения и с ℓ -м правее ее; наоборот, в качестве нового ℓ -го пути возьмем начальный (левый) участок старого ℓ -го пути и конечный (правый) участок k -го, как показано на рис. 3.5. Мы получили новый набор путей, отвечающий другой перестановке. Во-первых, легко видеть, что оба пути, получившиеся в результате перестановки, снова будут путями Шрёдера. Во-вторых, если исходный путь отвечал перестановке σ , то новый путь будет отвечать перестановке $\sigma' = \sigma \cdot (k\ell)$. В частности, перестановки σ и σ' будут иметь различную четность, т. к. они получаются друг из друга умножением на транспозицию.

Так, например, на рис. 3.5 (а) изображен набор путей, отвечающий перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; инволюция, примененная к нему, меняет участки сплошного черного и пунктирного путей справа от отмеченной точки. Полученный в результате набор путей изображен на рис. 3.5 (б); он уже отвечает перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Несложно видеть, что построенное таким образом отображение будет инволюцией: если применить его к новому набору путей еще раз, получится исходный набор. Это обусловлено нашим выбором той точки, после которой мы меняем два отрезка путей местами.

Проделав это, еще раз посмотрим на выражение

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \cdots r_{n-1+\sigma(n)}.$$

Как уже было сказано, оно равно сумме числа наборов путей, отвечающих всевозможным перестановкам, причем четные перестановки учитываются в этой сумме со знаком «плюс», а нечетные — со знаком «минус». Однако построенная выше инволюция показывает, что общий вклад наборов *пересекающихся* путей в эту сумму равен нулю: действительно, к каждому набору пересекающихся путей есть парный (получаемый из него инволюцией), который учитывается с противоположным

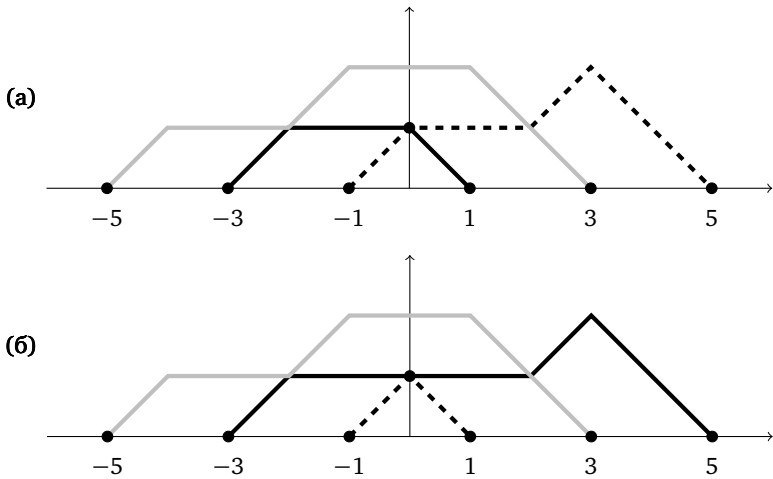


Рис. 3.5. Инволюция на множестве наборов пересекающихся путей

знаком. Отсюда следует, что эта сумма равна числу наборов *непересекающихся* путей. При этом важно отметить, что все наборы *непересекающихся* путей отвечают тождественной перестановке, а значит, входят со знаком «плюс». Число таких путей равно H_n , откуда и следует первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично. \square

Замечания. 1. Использованный нами метод подсчета числа *непересекающихся* путей при помощи определителя (также обычно называемый *методом Линдстрёма—Гесселя—Вьенно*) допускает многочисленные обобщения и оказывается весьма полезным во многих других комбинаторных задачах. О некоторых из них можно прочитать, например, в статье [1] или в брошюре [6].

2. Матрицы, определители которых были вычислены в предыдущей лемме, являются *матрицами Ганкеля*: так называются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{pmatrix},$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1})$ — некоторая числовая последовательность.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Вычислите определитель матрицы Ганкеля, построенной по последовательности чисел Каталана $C_1, C_2, \dots, C_{2n-1}$.

3.3. Наборы путей и замощения ацтекского бриллианта

Мы доказали, что количество наборов из n непересекающихся путей Шрёдера длины $2, 6, 10, \dots, 4n - 2$ равняется $2^{n(n+1)/2}$ — то есть числу, которое появляется в теореме об ацтекском бриллианте. Докажем, что такие наборы биективно соответствуют замощениям.

Рассмотрим некоторое замощение ацтекского бриллианта и построим по нему набор путей. После этого нарисуем на некоторых доминошках отрезки согласно следующему правилу. Возьмем левую нижнюю четверть бриллианта и отметим на вертикальных отрезках ее границы середины сторон. Далее возьмем те доминошки, которые содержат отмеченные точки, и нарисуем на каждой из них центрально-симметричный отрезок. Эти отрезки могут быть либо горизонтальными, если соответствующая доминошка расположена горизонтально, либо наклонными, если доминошка лежит вертикально. Вторые концы нарисованных отрезков выйдут на границу с другими доминошками; тем самым на границе других доминошек появятся отмеченные точки. Сделаем с ними то же самое: нарисуем на каждой из таких доминошек горизонтальный или наклонный отрезок. Будем продолжать этот процесс, пока это возможно; в результате получим набор из n путей, соответствующий замощению. Пример замощения и соответствующего набора путей показан на рис. 3.6.

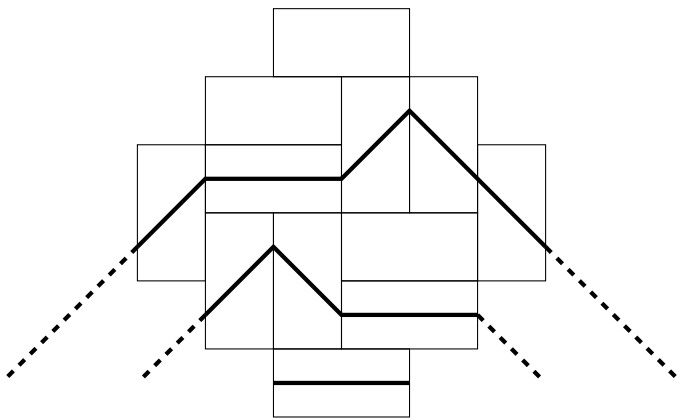


Рис. 3.6. Построение набора путей по замощению

Докажем, что эти пути не будут пересекаться. Заметим, что на каждом ребре любого из таких путей сумма координат изменяется на чет-

ную величину. Поэтому, аналогично замечанию 2 на с. 33, каждый путь может проходить только через те середины ребер, которые отмечены на рис. 3.7 кружками. Но на границе каждой доминошки таких точек либо ровно две, либо вообще ни одной — поэтому на каждой доминошке будет нарисовано не более одного отрезка.

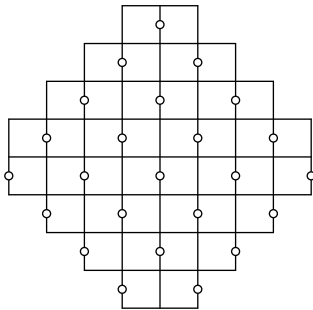


Рис. 3.7. Пути пересекают вертикальные ребра только в отмеченных точках

Далее, каждый из путей будет соединять середину вертикального отрезка на левой границе бриллианта с точкой, зеркально-симметричной ей относительно вертикальной оси бриллианта (почему?). Из этого набора можно изготовить набор n путей Шрёдера, причем единственным образом — для этого всего лишь нужно продолжить эти пути до пересечения с осью абсцисс, как показано на рис. 3.6 (продолжения путей обозначены пунктиром).

Тем самым из каждого замощения изготавливается набор непересекающихся путей Шрёдера. Это соответствие можно обратить: по набору путей можно построить замощение, нарисовав вокруг каждого горизонтального или диагонального участка пути горизонтальную или вертикальную доминошку соответственно; положение оставшихся доминошек тогда может быть восстановлено однозначно — они все будут горизонтальными (предлагаем читателю убедиться в этом самому). Значит, число замощений ацтекского бриллианта порядка n равно H_n , то есть $2^{n(n+1)/2}$. Это завершает третье доказательство теоремы об ацтекском бриллианте.

3.4. Числа Деланнуа и «утолщенный» бриллиант

Соответствие между замощениями и наборами путей, которое мы использовали, оказывается применимо и в других подобных ситуаци-

ях. Вот еще одна задача о замощениях, в которой возникает красивый комбинаторный ответ. Ее мы оставляем читателю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. n -м (*центральный*) *числом Деланнуа* называется число путей на координатной плоскости из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из звеньев вида $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(2, 0)$. (В отличие от путей Шрёдера, этим путям разрешается заходить ниже оси абсцисс.)

Иначе говоря, n -е число Деланнуа — это число способов провести шахматного короля из левого нижнего в правый верхний угол на доске размера $(n + 1) \times (n + 1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Рассмотрим ацтекский бриллиант, к которому добавили еще одну строку максимальной длины (см. рис. 3.8). Докажите, что число замощений этой фигуры будет равно n -му числу Деланнуа.

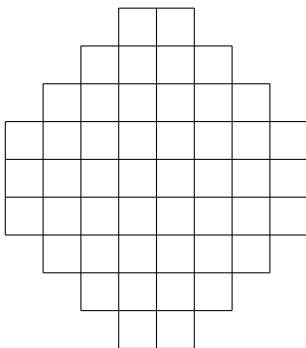


Рис. 3.8. Бриллиант с дополнительной средней строкой

УКАЗАНИЕ. Сопоставьте замощению «утолщенного» бриллианта путь (один!), построенный аналогично тому, как это делалось для обычного бриллианта. Докажите, что такой путь, во-первых, является путем Деланнуа, а во-вторых, полностью определяет замощение.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6 (почти что задача-шутка). А что будет, если строку в середине не добавить, а наоборот, удалить? (Такая фигура называется *фальшивым бриллиантом*.)

Заключение. А что еще бывает?

Мы рассмотрели три различных доказательства теоремы об ацтекском бриллианте. Однако возможные способы доказать эту теорему не исчерпываются этими тремя. Так, даже в самой первой статье, где шла речь об ацтекском бриллианте — в работе Элкиса, Куперберга, Ларсена и Проппа [9] — было приведено целых четыре доказательства, которые используют идеи из самых разных разделов математики, вплоть до теории представлений. Из этих четырех доказательств мы разобрали только одно, первое.

У теоремы об ацтекском бриллианте есть еще несколько доказательств, оставшихся за рамками нашей брошюры. Из них упомянем доказательство, полученное независимо И. И. Богдановым (оно изложено в статье К. П. Кохаса [5]) и Эриком Ко [15]. Оно основано на методе конденсации Доджсона¹. Метод конденсации впоследствии был обобщен Дэвидом Спайером [18] на более общие графы, что, в частности, привело к доказательству некоторых гипотез из теории кластерных алгебр.

В заключение мы упомянем несколько других задач (или даже направлений исследований), родственных задачам о замощениях доминошками. Некоторые из них оказывается возможным решить при помощи тех же методов, которые мы использовали при изучении ацтекского бриллианта.

4.1. Треугольная решетка

Мы рассматривали замощения доминошками фигур, нарисованных на квадратной решетке. Другая вариация этого сюжета состоит в том, чтобы вместо листа в клетку рассмотреть лист «в треугольник», т. е. плоскость, разбитую на равные правильные треугольники. Аналогом доминошки при этом будет ромб, составленный из двух треугольников с общей стороной. В случае квадратной решетки у доминошки было два возможных положения — вертикальное и горизонтальное; доминошку-ромб можно расположить уже тремя различными способами. Вопрос, который можно себе задать, тот же: сколькими способами

¹Английский математик Ч. Л. Доджсон также известен под своим литературным псевдонимом — Льюис Кэрролл.

данную фигуру на треугольной решетке можно замостить ромбами? Например, что будет получаться, если эта фигура — правильный шестиугольник со стороной n ?

На рис. 4.1 изображен пример замощения такого шестиугольника. Однако если применить пространственное воображение, ту же самую картинку можно трактовать и иначе: можно считать, что это не замощение плоскости ромбами, а пространственная фигура, сложенная из единичных кубиков! Кубики при этом заполняют часть координатного октанта, т. е. «угла комнаты». Такие пространственные фигуры называются *трехмерными диаграммами Юнга*; они тоже очень часто возникают в различных математических задачах.

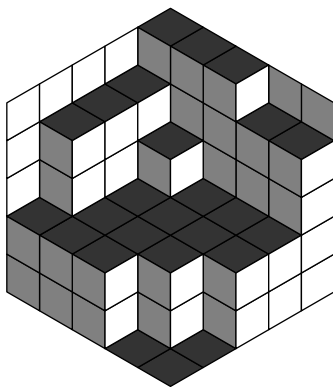


Рис. 4.1. Замощение ромбиками треугольной решетки

Интерпретация картинку с замощением как пространственной оказывается очень полезной: так, например, если определить для замощения ромбическими доминошками функцию высоты, как мы это делали в первой лекции, то ее значение будет равняться настоящей высоте, т. е. расстоянию от вершины соответствующего кубика до плоскости $x + y + z = 0$, деленному на $\sqrt{3}$.

Количество замощений шестиугольника со сторонами ℓ , m и n (иначе говоря, количество трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда) может быть найдено по *формуле Макмагона*:

$$Y_{3D}(\ell, m, n) = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Подробнее о формуле Макмагона и различных ее обобщениях можно прочесть, например, в брошюре [6].

4.2. Асимптотические задачи

Еще одна серия вопросов, возникающих в связи с замощениями, звучит так: как выглядит «типичное» замощение той или иной фигуры? К примеру, что можно сказать про взятое наугад замощение ацтекского бриллианта порядка n ?

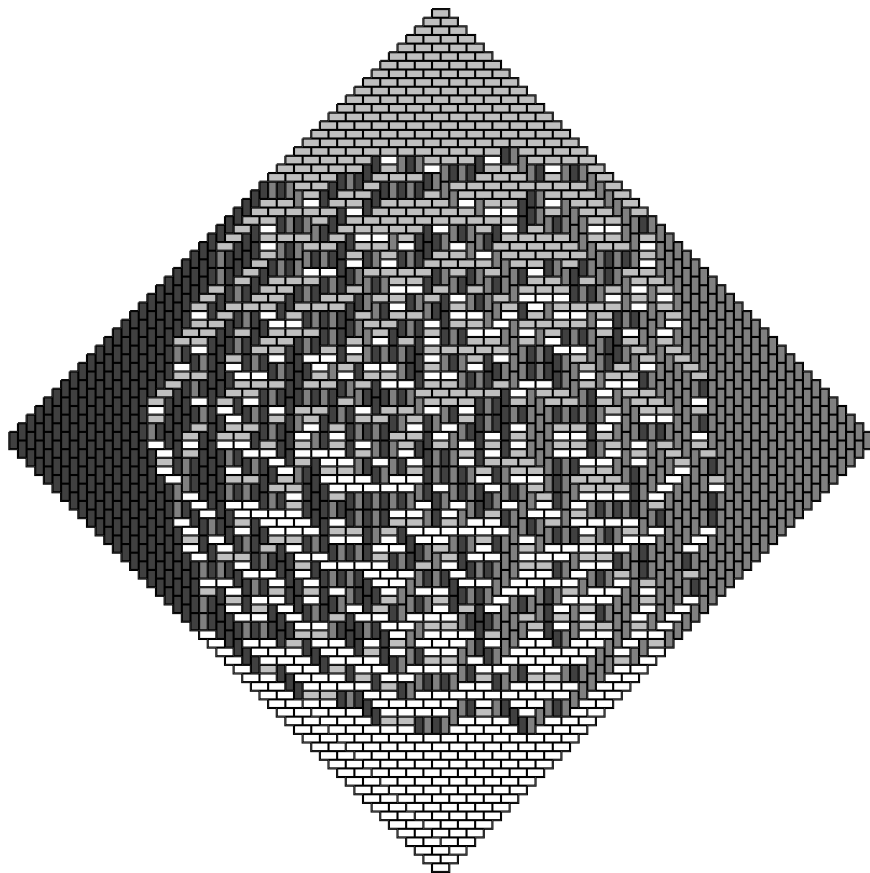


Рис. 4.2. Случайное замощение и полярный круг

Сказать о нем, как выясняется, можно довольно многое. А именно, если n достаточно большое, то с вероятностью, близкой к 1, у взятого наугад замощения окажутся «замороженные углы». Более точно, рассмотрим окружность, вписанную в квадрат, ограничивающий ацтек-

ский бриллиант. Она отрезает от квадрата четыре угла. Оказывается, что у типичного замощения почти все доминошки, попадающие в эти углы, т. е. вне этой окружности, будут «заморожены»: в нижнем и верхнем углу они все будут горизонтальными, а в левом и правом — вертикальными. Напротив, поведение замощения внутри этой окружности предсказать нельзя — оно является хаотичным. Все вышесказанное составляет утверждение *теоремы о полярном круге*, доказанной в 1995 году У. Джокушем, Дж. Проппом и П. Шором [12]: при стремлении порядка бриллианта к бесконечности граница «замороженной области» стремится ко вписанной в границу бриллианта окружности (она достаточно хорошо видна на рис. 4.2, на котором изображено «случайное» замощение ацтекского бриллианта порядка 50).

Аналогичными вопросами можно задаваться и для шестиугольников на треугольной решетке, тем самым выясняя, как ведет себя типичная трехмерная диаграмма Юнга. Однако это уже остается за пределами нашего рассказа. Тем, кто хочет узнать об этом больше, рекомендуем начать с популярных статей В. Е. Горина [2] и Р. Кеньона и А. Ю. Окунькова [14].

Список литературы

- [1] *Берштейн М. А., Мерзон Г. А.* Диаграммы Юнга, пути на решетке и метод отражений // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 112—141.
- [2] *Горин В. Е.* Что можно сложить из кубиков? // Квант. 2012. № 4. С. 6—11.
- [3] *Вялый М. Н.* Пфаффианы, или искусство расставлять знаки... // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 129—142.
- [4] *Кохась К. П.* Разбиения на домино // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 143—163.
- [5] *Кохась К. П.* Разбиение ацтекских алмазов и квадратов на домино // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVI. СПб.: ПОМИ, 2008. (Зап. научн. сем. ПОМИ; Т. 360). С. 180—230.
- [6] *Смирнов Е. Ю.* Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
- [7] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Т. 2. М.: Мир, 2009.
- [8] *Bressoud D.* Proofs and confirmations: the story of the alternating sign-matrix conjecture. Washington, DC: Mathematical Association of America; Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [9] *Elkies N., Kuperberg G., Larsen M., Propp J.* Alternating-sign matrices and domino tilings, I, II // J. Algebraic Combin. 1992. V. 1. P. 111—132, 219—234.
- [10] *Eu S.-P., Fu T.-S.* A simple proof of the Aztec diamond theorem // Electron. J. Combin. 2005. V. 12. Research Paper 18.
- [11] *Goncharov A. B., Kenyon R.* Dimers and cluster integrable systems // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). 2013. V. 46, № 5. P. 747—813.
- [12] *Jockusch W., Propp J., Shor P.* Random domino tilings and the Arctic circle theorem. Preprint, arXiv:math/9802068.
- [13] *Kasteleyn P. W.* The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice // Physica. 1961. V. 27, № 12. P. 1209—1225.
- [14] *Kenyon R., Okounkov A.* What is... a dimer? // Notices of the AMS. 2005. V. 52, № 3. P. 342—343.
- [15] *Kuo E. H.* Applications of Graphical Condensation for Enumerating Matchings and Tilings // Theoretical Computer Science. 2004. V. 319. P. 29—57.
- [16] *Kuperberg G.* Another proof of the alternating-sign matrix conjecture // Internat. Math. Res. Notices. 1996. № 3. P. 139—150.
- [17] *Propp J.* Generalized domino-shuffling // Theoret. Comput. Sci. 2003. V. 303, № 2—3. P. 267—301.
- [18] *Speyer D. E.* Perfect matchings and the octahedron recurrence // J. Algebraic Combin. 2007. V. 25, № 3. P. 309—348.
- [19] *Stanley R.* Catalan Addendum (to Enumerative Combinatorics). <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>.
- [20] *Temperley H. N. V., Fisher M. E.* Dimer problem in statistical mechanics—an exact result // Philosophical Magazine. 1961. V. 6, № 68. P. 1061—1063.
- [21] *Zeilberger D.* Proof of the alternating sign matrix conjecture // Electron. J. Combin. 1996. V. 3, № 2. Research Paper 13.

Содержание

Введение	3
Взгляд первый: знакочередующиеся матрицы	
1.1. Замощение и конфигурация стрелок	7
1.2. Чередование	9
1.3. Знакочередующиеся матрицы	11
1.4. Гипотеза о знакочередующихся матрицах и квадратный лед	12
1.5. Функция высоты	15
1.6. Построение замощения по знакочередующейся матрице	20
1.7. Завершение доказательства теоремы об ацтекском бриллианте	24
Взгляд второй: совершенные паросочетания на графах	
2.1. Совершенные паросочетания и замощения	25
2.2. Взвешенные суммы	26
2.3. Лемма о расширении площадей	27
2.4. Подсчет числа совершенных паросочетаний ацтекского бриллианта	30
Взгляд третий: числа Шрёдера и непересекающиеся пути	
3.1. Числа Шрёдера	33
3.2. Наборы непересекающихся путей Шрёдера	35
3.3. Наборы путей и замощения ацтекского бриллианта	40
3.4. Числа Деланна и «утолщенный» бриллиант	41
Заключение. А что еще бывает?	
4.1. Треугольная решетка	43
4.2. Асимптотические задачи	45