УДК ????

А. В. Устинов

Последовательности Сомоса

§ 1. Последовательности Сомос-4

Первый нетривиальный пример *последовательности Сомоса* — это последовательность Сомос-4. Она задаётся рекуррентным соотношением

$$s_{n+2}s_{n-2} = \alpha s_{n+1}s_{n-1} + \beta s_n^2, \tag{1}$$

где α и β — произвольные константы. Четвёрка в названии — это порядок рекуррентного соотношения (1). Он показывает, сколько надо задать начальных членов последовательности $\{s_n\}$, чтобы можно было вычислить все остальные. Для последовательности Сомос-4 обычно считаются заданными s_0, s_1, s_2 и s_3.

Если элементы последовательности $\{s_n\}$ не обращаются в ноль, то рекуррентное соотношение (1) задаёт бесконечную в обе стороны числовую последовательность. В противном случае на последовательность требуется накладывать дополнительные условия. Естественней всего предполагать, что элементы последовательности — комплексные числа. Читатель, не знакомый с комплексными числами, может считать элементы последовательности $\{s_n\}$ действительными.

Уравнению (1) удовлетворяют некоторые простые последовательности, например,

$$s_n = (An + B)q^{an^2+bn+c}, \tag{2}$$

где A, B, q, a, b, c — произвольные константы. Частными случаями этой последовательности являются арифметическая и геометрическая прогрессии, а также последовательность q^{n^2}, которая при $q > 1$ растёт быстрее любой геометрической прогрессии.

Задача 1. Докажите, что последовательность (2) действительно удовлетворяют уравнению (1). Найдите соответствующие ей коэффициенты α и β.

Более интересный пример последовательности Сомос-4 представляет собой последовательность *чисел Фибоначчи*

$$F_0, F_1, F_2, \ldots = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots, \tag{3}$$

которая задаётся начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$. Для отрицательных номеров последовательность Фибоначчи доопределяется с помощью этого же соотношения, переписанного в виде $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ $(n \leqslant 0)$. Оказывается, что элементы последовательности Фибоначчи удовлетворяю равенству

$$F_{n+2}F_{n-2} = -F_{n+1}F_{n-1} + 2F_n^2. \tag{4}$$

Значит, последовательность Фибоначчи — это тоже последовательность Сомос-4.

Задача 2. Докажите формулу (4).

Последовательность Фибоначчи является частным случаем *линейной рекуррентной последовательности второго порядка*. В общем случае такие последовательности задаются рекуррентным соотношением

$$s_{n+2} = us_{n+1} + vs_n \tag{5}$$

с постоянными коэффициентами u и v. Оказывается, что все такие последовательности также удовлетворяют уравнению (1), т.е. являются последовательностями Сомос-4.

Задача 3. Выразите через u и v коэффициенты уравнения (1), которому удовлетворяет последовательность, задаваемая уравнением (5).

Известно, что любое решение уравнения (5) имеет вид (см. [3]) $s_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ или $s_n = (c_1 n + c_0)\lambda^n$, где все параметры — комплексные числа. Значит, s_n ограничены геометрической прогрессией. Поэтому последовательность $s_n = q^{n^2}$, удовлетворяющая равенству (1), не является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка.

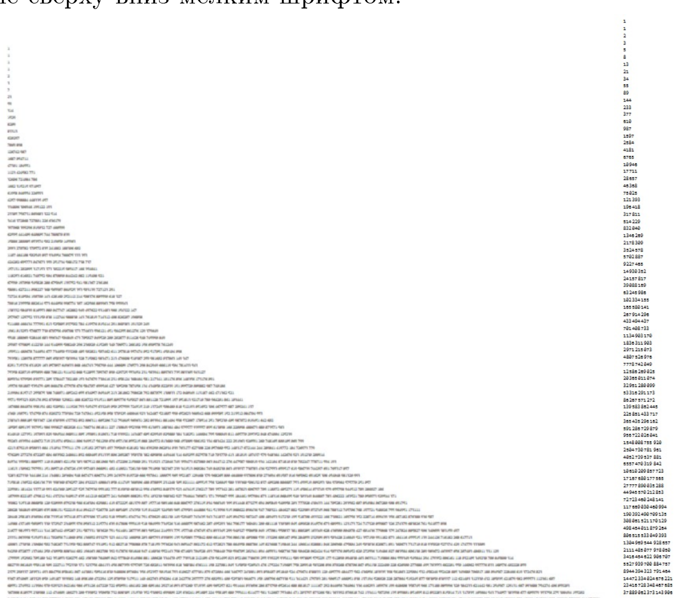
Ещё один пример быстро растущей последовательности — это *Сомос*-(4). Круглые скобки здесь означают, что мы рассматриваем специальную последовательность Сомос-4 с начальными условиями $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 1$, удовлетворяющую рекуррентному уравнению (1), в котором коэффициенты α и β также равны с единицам:

$$s_{n+2}s_{n-2} = s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2. \tag{6}$$

Вот начало этой последовательности:

$$s_0, s_1, \ldots = 1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, \ldots \tag{7}$$

На рисунке слева изображены первые 80 элементов последовательности Сомос-(4), выписанные сверху вниз мелким шрифтом:



Правая сторона получившегося криволинейного треугольника похожа на параболу. Это значит, что последовательность Сомос-(4) растёт примерно как c^{n^2}, где $c > 1$. В частности, отсюда следует, что Сомос-(4) не является линейной рекуррентной последовательностью. Для сравнения на рисунке справа помещены первые 80 чисел Фибоначчи. Правая сторона получившегося треугольника близка к прямой линии, что соответствует экспоненциальному росту чисел Фибоначчи.

Задача 4. Докажите, что последовательность Сомос-(4) не является последовательностью вида (2).

В общем случае элементы последовательности Сомос-(4) нельзя выразить через элементарные функции, здесь оказываются необходимы *эллиптические функции*, разговор о которых выходит за рамки статьи. Поэтому мы займёмся теми свойствами последовательностей Сомоса, которые можно получить, используя лишь элементарные соображения. Нашей главной целью будет доказательство следующих двух результатов.

Теорема 1. *Все элементы последовательности Сомос-(4) — целые числа.*

Теорема 2. *Остатки, которые элементы последовательности Сомос-(4) дают при делении на произвольное натуральное число m, периодически повторяются.*

Решив задачи 14– 16, читатель сможет доказать аналогичные утверждения и для последовательности Сомос-(5).

Теорема 1 неочевидна, поскольку для нахождения очередного элемента s_{n+2} по формуле (6) сумму $s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2$ нужно поделить на s_{n-2}, и непонятно, почему всегда происходит деление нацело.

Аналог теоремы 2 хорошо известен для линейных рекуррентных последовательностей. Например, остатки, которые дают числа Фибоначчи при делении на натуральное m, периодически повторяются. Для доказательства достаточно заметить, что от уравнения $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ можно перейти к сравнению $F_{n+1} \equiv F_n + F_{n-1} \pmod{m}$. [1] С его помощью остаток $F_{n+1} \bmod m$ однозначно определяется по паре остатков $(F_n \bmod m, F_{n-1} \bmod m)$. [2] Таких пар не больше m^2, следовательно, найдутся два значения n, для которых пары остатков совпадут, а это приведёт к зацикливанию последовательности $F_n \pmod{m}$. Подобное рассуждение нельзя провести для последовательности Сомос-(4). Например, если модуль — это простое число p, то может случиться так, что $s_{n-2} \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда сравнение $s_{n+2}s_{n-2} \equiv s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2 \pmod{p}$ не позволит найти значение s_{n+2}. Таким образом нелинейность рекуррентного соотношения оказывается существенным препятствием к доказательству периодичности.

[1] Сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ по определнию означает, что разность $a - b$ делится на m, или, другими словами, что a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

[2] Здесь $\bmod m$ — это операция, которая превращает число в его остаток от деления на m, лежащий в пределах от 0 до $m - 1$.

§ 2. Последовательности Сомоса произвольного порядка

Определение 1. *Последовательностью Сомос–k ($k \geqslant 2$) называется последовательность $\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, которая задаётся квадратичным рекуррентным соотношением*

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j}, \tag{8}$$

где α_j — некоторые константы.

Номер k — это порядок рекуррентного соотношения (8). Он показывает, сколько надо знать подряд идущих членов последовательности $\{s_n\}$, чтобы можно было вычислить все остальные её члены. В последовательности Сомос-k обычно предполагают известными значения $s_0, \ldots, s_{k-1}$.

Следующие задачи показывают, что последовательности Сомоса для $k = 2$ и $k = 3$ устроены очень просто. Таким образом, Сомос-4, как было сказано выше, действительно есть первый нетривиальный пример последовательности Сомоса.

Задача 5. Докажите, что члены последовательности Сомос–2, задаваемой уравнением $s_{n+2}s_n = \alpha s_{n+1}^2$, могут быть найдены по формуле

$$s_n = \alpha^{n(n-1)/2} s_0^{1-n} s_1^n.$$

Задача 6. Докажите, что члены последовательности Сомос–3, задаваемой уравнением $s_{n+3}s_n = \alpha s_{n+2}s_{n+1}$, имеют вид

$$s_n = \begin{cases} \alpha^{n^2/4} s_{-1}^{-n/2} s_0 s_1^{n/2}, & \text{если } n \text{ чётное;} \\ \alpha^{(n^2-1)/4} s_{-1}^{(1-n)/2} s_1^{(n+1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётное.} \end{cases} \tag{9}$$

Аналогично последовательности Сомос-(4) определяются последовательности Сомос-(k) для $k > 4$. Для этого в формуле (8) надо положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$ и выбрать $s_0 = s_1 = \ldots = s_{k-1} = 1$. Например, последовательность Сомос–(5) задаётся уравнением

$$s_{n+5}s_n = s_{n+4}s_{n+1} + s_{n+3}s_{n+2}, \tag{10}$$

и начинается следующим образом:

$$s_0, s_1, \ldots, = 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 11, 37, 83, 274, 1217, 6161, \ldots$$

Последовательность Сомос–(6) задаётся соответственно уравнением

$$s_{n+6}s_n = s_{n+5}s_{n+1} + s_{n+4}s_{n+2} + s_{n+3}^2, \tag{11}$$

и начинается с чисел

$$s_0, s_1, \ldots, = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1103, \ldots$$

Целочисленными оказываются только последовательности Сомос–(k) при $k = 4, 5, 6, 7$. Дальше эта закономерность нарушается. Например, в последовательности Сомос–(8) восемнадцатый член равен $\frac{420514}{7}$.

Задача 7. Про последовательности $s_n = n^2$ и $s_n = 2^{n^3}$ выясните, являются ли они последовательностями (а) Сомос–4, (б) Сомос–6.

В целом чем больше номер k, тем более сложно может быть устроена последовательность Сомос-k. Однако для малых k при переходе от чётного номера к нечётному ситуация усложняется не очень сильно. Можно увидеть, что последовательность Сомос-3, как и любая последовательность Сомоса нечётного порядка, обладает дополнительной степенью свободы: элементы с чётными или с нечётными номерами можно умножить на ненулевую константу, и при этом получится последовательность, удовлетворяющая тому же уравнению (8).

Равенства (9) можно переписать в виде

$$s_n = \Delta_n \alpha^{n^2/4} s_{-1}^{-n/2} s_0 s_1^{n/2}, \text{ где } \Delta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ чётное;} \\ \alpha^{-1/4} s_{-1}^{1/2} s_1^{-1/2}, & \text{если } n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Таким образом, умножив элементы последовательности Сомос-3 с чётными номерами на подходящее число, можно получить последовательность Сомос-2.

Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для последовательности Сомос-5 (см. задачи 18–19 ниже). Её подпоследовательности с чётными и нечётными номерами являются последовательностями Сомос-4. Умножив элементы последовательности Сомос-5 с чётными номерами на некоторую константу, можно получить последовательность Сомос-4. По-видимому, аналогичное явление будет наблюдаться и для некоторых последовательностей Сомоса более высокого порядка.

§ 3. История о суммах квадратов, рассказанная Майклом Сомосом

Прежде чем перейти к детальному исследованию последовательностей Сомоса, приведём доводы самого Майкла Сомоса, объясняющие, как появляются такие последовательности, см. [12].

Одно из классических направлений теории чисел занимается вопросами о представлении чисел в виде сумм квадратов. Один из главных результатов в этой области — это следующая теорема Лагранжа.

Теорема 3. *Каждое целое неотрицательное число представимо суммой четырёх квадратов.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в брошюре [6]. Разложений в сумму четырёх квадратов может быть несколько. Например,

$$4 = 2^2+0^2+0^2+0^2 = 1^2+1^2+1^2+1^2, \quad 10 = 3^2+1^2+0^2+0^2 = 2^2+2^2+1^2+1^2.$$

Будем рассматривать такие представления, в которых все слагаемые отличны от нуля. Тогда наименьшее число, представимое тремя разными способами — это 28:

$$28 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2.$$

Числа, которые здесь возводятся в квадрат, оказываются связаны друг с другом: перемножив числа в каждой четвёрке, мы получим произведения

$$5 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \qquad 32 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1, \tag{12}$$

одно из которых есть разность двух других: $5 = 32 - 27$.

Следующий пример числа, обладающего тремя различными разложениями в сумму четырёх квадратов — это 42:

$$42 = 6^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2.$$

Здесь числа, возводимые в квадрат, связаны друг с другом точно так же. Произведения чисел в четвёрках суть

$$12 = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1, \qquad 60 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 48 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2. \tag{13}$$

Как и в предыдущем примере, оказывается, что одно из произведений есть разность двух других: $12 = 60 - 48$.

Выделим в последовательности чисел Фибоначчи (3) подпоследовательность с чётными номерами:

$$F_0, F_2, F_4, \ldots, F_{2n}, \ldots = 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \ldots$$

Заменим теперь в произведениях (12) каждое число n на F_{2n}. Тогда мы получим числа

$$55 = 55 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \qquad 567 = 21 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \qquad 512 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1,$$

одно из которых снова есть разность двух других: $55 = 567 - 512$. То же самое получается, если замену $n \to F_{2n}$ сделать в произведениях (13):

$$432 = 144 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1, \qquad 3960 = 55 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3, \qquad 3528 = 21 \cdot 21 \cdot 8 \cdot 1,$$

и $432 = 3960 - 3528$.

Приведённые выше примеры разложений в суммы квадратов чисел 28 и 42 являются частными случаями более общих тождеств

$$(n+2)^2 + (n-2)^2 + 1^2 + 1^2 = (n+1)^2 + (n-1)^2 + 2^2 + 2^2 = n^2 + n^2 + 3^2 + 1^2.$$

И при любом целом n выполняются равенства

$$(n+2) \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot 1 = (n+1) \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 2 - n \cdot n \cdot 3 \cdot 1, \tag{14}$$

$$F_{2(n+2)} \cdot F_{2(n-2)} \cdot F_2 \cdot F_2 = F_{2(n+1)} \cdot F_{2(n-1)} \cdot F_4 \cdot F_4 - F_{2n} \cdot F_{2n} \cdot F_6 \cdot F_2. \tag{15}$$

Задача 8. Что изменится, если вместо замены $n \to F_{2n}$ использовать замену $n \to F_n$?

Равенства (14) и (15) можно понимать следующим образом: обе последовательности $s_n = n$ и $s_n = F_{2n}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$s_{n+2} s_{n-2} s_1^2 = s_{n+1} s_{n-1} s_2^2 - s_n^2 s_3 s_1. \tag{16}$$

Естественным образом возникает вопрос о том как устроены другие решения уравнения (16). Например, можно в качестве начальных условий взять единицы: $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Тогда соотношение (16) примет вид

$$s_{n+2} s_{n-2} = s_{n+1} s_{n-1} - s_n^2. \tag{17}$$

Если дополнительно выбрать $s_4 = -1$, то мы получим числа

$$s_0, s_1, \ldots = 0, 1, 1, 1, -1, -2, -3, -1, 7, 11, 20, -19, -87, -191, \ldots$$

Похожий пример — последовательность, которая получается при $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = -1$. Здесь мы приходим к уже известному нам уравнению (6), и при $s_4 = 1$ приходим к последовательности

$$s_0, s_1, \ldots = 0, \mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, 1, \mathbf{2}, -1, -\mathbf{3}, -5, \mathbf{7}, -4, -\mathbf{23}, 29, \mathbf{59}, 129, \ldots \tag{18}$$

Можно заметить, что элементы этой последовательности с нечётными номерами, выделенные жирным, имеют чередующиеся знаки. Если эти знаки отбросить, то получится последовательность Сомос-(4), см. (7).

Все последовательности, которые здесь возникли, являются целочисленными, но это отнюдь не очевидно. Действительно, каждый раз для нахождения элемента s_{n+2} правую часть рекуррентного соотношения надо поделить на число s_{n-2}, которое может быть сколь угодно большим. Поэтому целочисленность подобных последовательностей является нетривиальным фактом, который нуждается в обосновании.

Замечание 1. При вычислениях принцип «суммы квадратов» позволяет контролировать правильность формул: если формула верная, то во всех слагаемых суммы квадратов индексов должны быть одинаковыми. При этом надо не забывать, что в конкретных примерах единичные сомножители, которые обычно не пишут, могут иметь смысл начальных элементов данной последовательности. Сравните суммы квадратов индексов в формулах (16) и (17).

§ 4. Первое доказательство целочисленности последовательности Сомос-(4)

У теоремы 1 есть короткое доказательство, не требующее детального изучения последовательности Сомос-(4). Единственное свойство, которое понадобится, очень простое.

Лемма 1. *Пусть в последовательности Сомос-(4) элементы s_0, s_1, …, s_n — целые числа. Тогда в любой четвёрке $(s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k)$, где $k = 3, \ldots, n$, все числа попарно взаимно просты.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы по индукции. При $k = 3$ мы имеем четвёрку $(s_0, s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 1, 1)$, в которой, очевидно, все числа попарно взаимно просты. Предположим, что утверждение леммы доказано вплоть до четвёрки $(s_{k-4}, s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1})$, где $4 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для доказательства попарной взаимной простоты чисел s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k достаточно проверить, что $(s_{k-3}s_{k-2}s_{k-1}, s_k) = 1$. Действительно, из равенства (6) следует, что s_k может иметь общий простой делитель p с s_{k-1} или с s_{k-3} тогда и только тогда, когда p делит s_{k-2}. Но это противречит сделанному предположению.

Первое доказательство теоремы 1. Проверим, что если числа s_{n-4}, …, s_n, …, s_{n+3} — целые (очевидно, это утверждение верно при $n = 4$), то число s_{n+4} также будет целым. Тогда по индукции получим, что все числа

s_n — целые. Для краткости положим $s_{n-3} = a$, $s_{n-2} = b$, $s_{n-1} = c$. Тогда $s_n s_{n-4} = ac + b^2$, и s_n делит $ac + b^2$. Согласно лемме 1, $(abc, s_n) = 1$. Поэтому мы можем несколько раз применить рекуррентное соотношение (6) по модулю числа s_n:

$$s_{n+1}a = s_n b + c^2 \equiv c^2 \pmod{s_n}, \text{ т. е. } s_{n+1} \equiv c^2 a^{-1} \pmod{s_n};$$
$$s_{n+2}b = s_{n+1}c + s_n^2 \equiv s_{n+1}c \pmod{s_n}, \text{ т. е. } s_{n+2} \equiv c^3 a^{-1} b^{-1} \pmod{s_n};$$
$$s_{n+3}c = s_{n+2}s_n + s_{n+1}^2 \equiv s_{n+1}^2 \pmod{s_n}, \text{ т. е. } s_{n+3} \equiv c^3 a^{-2} \pmod{s_n}.$$

Здесь везде подразумевается, что обратный элемент вычисляется по модулю s_n.[3] Таким образом, по модулю s_n получаем последовательность

$$a, \quad b, \quad c, \quad 0, \quad c^2a^{-1}, \quad c^3a^{-1}b^{-1}, \quad c^3a^{-2}.$$

Следующий элемент s_{n+4} мы должны находить из равенства $s_n s_{n+4} = s_{n+1}s_{n+3} + s_{n+2}^2$. Но теперь мы можем проверить делимость правой части на s_n, заменив все числа их остатками от деления на s_n:

$$s_{n+1}s_{n+3} + s_{n+2}^2 \equiv c^5(ac + b^2)a^{-3}b^{-2} \equiv 0 \pmod{s_n}.$$

Таким образом s_n делит $s_{n+1}s_{n+3} + s_{n+2}^2$, и s_{n+4} — целое число.

Приведённое доказательство опирается на тот странный факт, что в выражении $s_{n+1}s_{n+3} + s_{n+2}^2$, взятом по модулю s_n, удалось выделит сомножитель $ac + b^2 = s_{n-3}s_{n-1} + s_{n-2}^2$, делящийся на s_n. Это рассуждение, конечно, доказывает теорему, но проливает мало света на природу последовательности Сомос-(4). Например, не понятно, повезёт ли нам снова, когда мы попытаемся так же доказывать целочисленность какой-нибудь последовательности Сомоса более высокого порядка. Оказывается, что это действительно так, и впервые целочисленность последовательностей Сомос-(4), …, Сомос-(7) была доказана именно таким образом, см. [9]. Это потребовало огромных символических вычислений, проделанных на компьютере, и сделало ситуацию лишь ещё более загадочной.

Задача 9. Предположим, что в последовательности Сомос-(5), задаваемой равенством (10), элементы s_0, s_1, …, s_n — целые числа. Докажите, что в любой пятёрке $(s_{k-4}, s_{k-3}, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k)$, где $k = 4, \dots, n$, все числа попарно взаимно просты.

Замечание 2. Утверждения, сформулированные в лемме 1 и в задаче 9, допускают уточнение, см. задачи 21, 22 ниже.

Приведём также задачу с московской олимпиады 1963 г., решение которой использует ту же идею, что и первое доказательство теоремы 1.

Задача 10. Последовательность a_1, a_2, a_3, … задаётся начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, и рекуррентным соотношением

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \qquad n \geqslant 3.$$

Докажите, что все элементы этой последовательности — целые числа.

[3] Обратным к a по модулю m называется такое число a^{-1}, что $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$. Обратный элемент существует тогда и только тогда, когда $(a, m) = 1$, см. [2]. Далее во всех сравнениях обратные элементы будут пониматься именно в таком смысле.

§ 5. Скрытый инвариант последовательности Сомос — 4

Рассмотрим произвольную последовательность Сомос-4, задаваемую рекуррентным соотношением (1). Можно заметить, что вместе с последовательностью $\{s_n\}$ тому же рекуррентному соотношению будет удовлетворять и любая последовательность вида $\widetilde{s}_n = A \cdot B^n \cdot s_n$, где A, B — ненулевые константы. Поэтому естественно перейти к новым переменным, для которых подобной свободы уже не будет. Эти новые переменные —

$$f_n = \frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2}. \tag{19}$$

Так как $\frac{s_{n+2}s_{n-2}}{s_n^2} = f_{n+1}f_n^2 f_{n-1}$, то в терминах переменных f_n рекуррентное соотношение (1) перепишется в виде

$$f_{n+1}f_n^2 f_{n-1} = \alpha f_n + \beta. \tag{20}$$

Ситуация становится проще, поскольку новое рекуррентное соотношение имеет уже не четвёртый, а второй порядок.

Оказывается, что любая последовательность, задаваемая формулой (20), обладает не видимым на первый взгляд инвариантом.

Теорема 4. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ задана рекуррентным соотношением (20). Тогда величина*

$$T_n = f_n f_{n-1} + \alpha \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n-1}} \right) + \frac{\beta}{f_n f_{n-1}} \tag{21}$$

не зависит от n.

Доказательство. Выразим коэффициент β двумя разными способами:

$$f_{n+1}f_n^2 f_{n-1} - \alpha f_n = \beta = f_{n+2}f_{n+1}^2 f_n - \alpha f_{n+1}$$

Поделим все три выражения на $f_n f_{n+1}$

$$f_{n-1}f_n - \frac{\alpha}{f_{n+1}} = \frac{\beta}{f_n f_{n+1}} = f_{n+1}f_{n+2} - \frac{\alpha}{f_n},$$

а затем прибавим ко всем частям сумму $f_n f_{n+1} + \alpha \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right)$. Тогда посередине мы получим величину T_n, а по краям — два новых выражения для T_n:

$$f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} + \frac{\alpha}{f_n} = T_n = f_n f_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2} + \frac{\alpha}{f_{n+1}}.$$

Правая часть получается из левой заменой $n \to n+1$. Поскольку n произвольно, равенство этих выражений означает, что они не зависят от номера n, а значит, T_n — инвариант.

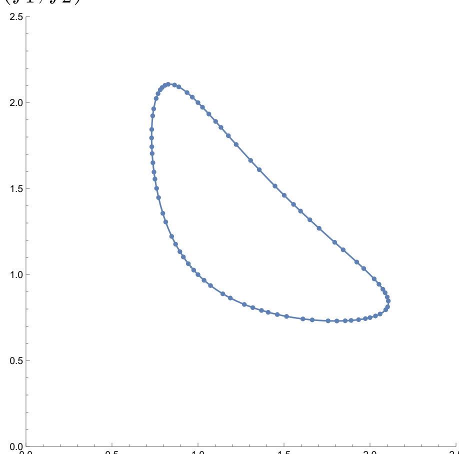
Следствие 1. *Значение инварианта T можно вычислять по формуле*

$$T = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} + \frac{\alpha}{f_n}. \tag{22}$$

Как сама теорема 4, так и её доказательство, при первом знакомстве вызывают чувство недоумения. Когда предъявлена формула (21) и написано доказательство инвариантности величины T_n, проверить все выкладки легко. Но не понятно, откуда появилася инвариант T_n, и как мы угадали те шаги, которые нужно сделать для доказательства теоремы 4. На эти вопросы мы ответим в разделе 8. А пока заметим, что на инвариант $T = T_n$, задаваемый формулой (21), можно посмотреть с геометрической точки зрения. Если на плоскости Oxy рисовать точки с координатами $(x, y) = (f_{n-1}, f_n)$, то все они будут лежать на кривой, задаваемой уравнением

$$xy + \alpha\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{\beta}{xy} = T. \tag{23}$$

Таким образом инвариант T — это коэффициент кривой (23), которая скрывается за последовательностью (6). Кривую (23) можно обнаружить экспериментально, если нарисовать достаточно много точек $(x, y) = (f_{n-1}, f_n)$, см. рисунок. А существование такой кривой уже само по себе означает наличие инварианта: пары (f_{n-1}, f_n) связаны некоторым соотношением, зависящем от начальных условий (f_1, f_2).

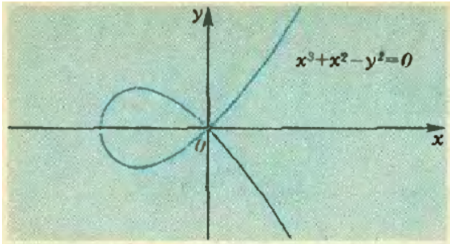


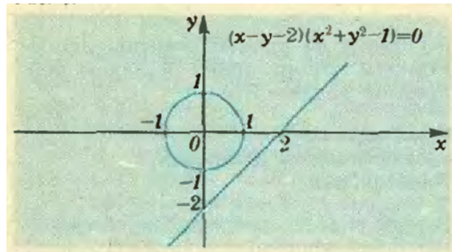
§ 6. Связь с эллиптическими кривыми

Попытки привести равенство (23) к уравнению эллипса, параболы или гиперболы обречены на неудачу. Однако, заменив y на новую переменную $y' = xy$, уравнение (23) можно свести к уравнению третьей степени вида

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + \ldots + cy + d = 0.$$

Кривые, задаваемые такими уравнениями называются *кривыми третьего порядка.* Можно доказать, что они делятся на два больших класса. К первому классу относятся кривые, которые имеют точку возврата (как точка $(0; 0)$ у полукубической параболы $y^2 = x^3$), точку самопересечения (как точка $(0; 0)$ у декартового листа $y^2 = x^3 + x^2$, см. рис...), а также кривые, для которых многочлен $f(x, y)$ представим в виде $f(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — многочлены меньших степеней, см. рис...





Назовём такие кривые *вырожденными.* Второй класс образуют все остальные, невырожденные кривые, которые называются *эллиптическими.* Известно, что каждую такую кривую с помощью замены переменных можно привести к каноническому виду $y^2 = x^3 + ax + b$. Таким образом, уравнение (23) (за исключением некоторых вырожденных случаев, которые как раз и соответствуют элементарным последовательностям Сомос-4) неизбежно приводит нас в мир эллиптических кривых. В частности, отсюда следует, что последовательности Сомос-4 — неэлементарные объекты. Для полного описания их свойств требуется использование эллиптических функций, которые связаны с эллиптическими кривыми так же, как тригонометрические функции — с окружностью.

Основное свойство любой эллиптической кривой состоит в том, что на ней определена операция сложения точек, см. подробности в статье [4]. Если подходить к последовательностям Сомос-4 с точки зрения эллиптических кривых, то оказывается, что каждой такой последовательности будет соответствовать «арифметическая прогрессия» из точек $P_n = P_0 + nP$ $(n \in \mathbb{Z})$ на некоторой кривой.

Например, чтобы получить последовательность (18), нужно рассмотреть кривую $y^2 = x^3 - x + \frac{1}{4}$ и точку $P = (0, \frac{1}{2})$ на ней. Тогда точка $nP = \underbrace{P + P + \ldots + P}_{n}$ будет иметь координаты $\left(\frac{\varphi_n}{\psi_n^2}, \frac{\omega_n}{\psi_n^3}\right)$, где $\{\psi_n\}$ — это последовательность (18) $(\psi_0 = 0,\ \psi_1 = \psi_2 = 1,\ \psi_3 = -1,\ \ldots)$, $\varphi_n = -\psi_{n-1}\psi_{n+1}$ и $\omega_n = (\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2)/2$. Элементы последовательности Сомос-(4) при таком подходе — это числа $(-1)^n\psi_{2n-3}$. Можно сказать, что им соответствует «разреженная» арифметическая прогрессия, состоящая из точек $P_{2n-3} = P + 2(n-2)P$.

Таким образом все свойства последовательностей Сомос-4 можно рассматривать не как странные случайности, а как следствия того, что в действительности (в скрытом виде) мы имеем дело с эллиптическими кривыми. Возможность складывать точки проявляется в виде арифметических свойств последовательностей. Более подробные сведения об эллиптических криых можно найти в статьях журнала «Квант» [1, 4, 5].

§ 7. Сомос-4 есть Сомос-5

Одним из основных свойств последовательностей Сомос-4 является то, что они также является последовательностями Сомос-k для любого $k \geqslant 5$. Более точно этот результат можно сформулировать следующим образом: для любого $j \geqslant 2$ можно предъявить такие числа α_j, β_j, $\widetilde{\alpha}_j$, $\widetilde{\beta}_j$, что будут выполняться равенства

$$s_{n+j}s_{n-j} = \alpha_j s_{n+1}s_{n-1} + \beta_j s_n^2 \quad (k = 2j),$$
$$s_{n+j+1}s_{n-j} = \widetilde{\alpha}_j s_{n+2}s_{n-1} + \widetilde{\beta}_j s_{n+1}s_n \quad (k = 2j+1).$$

Мы ограничимся рассмотрением случая $k = 5$, поскольку этого будет достаточно для доказательства теорем 1 и 2. Доказательство общего результата см. в [7, 10].

Теорема 5. *Пусть последовательность Сомос-*4*, задана рекуррентным соотношением* (1) *и имеет инвариант T. Тогда эта последовательность является последовательностью Сомос-*5 *и удовлетворяет уравнению*

$$s_{n+3}s_{n-2} = \tilde{\alpha}s_{n+2}s_{n-1} + \tilde{\beta}s_{n+1}s_n \tag{24}$$

с коэффициентами

$$\tilde{\alpha} = -\beta \text{ и } \tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T. \tag{25}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, перейдём к более удобным переменным f_n, см. (19). Поделим уравнение (24) на $s_{n+1}s_n$ и заметим, что

$$\frac{s_{n+2}s_{n-1}}{s_{n+1}s_n} = f_n f_{n+1}, \qquad \frac{s_{n+3}s_{n-2}}{s_{n+1}s_n} = f_{n+2}f_{n+1}^2 f_n^2 f_{n-1}.$$

В новых переменных уравнение (24) примет вид

$$f_{n+2}f_{n+1}^2 f_n^2 f_{n-1} = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta}.$$

Попробуем подобрать коэффициенты $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ так, чтобы это равенство действительно выполнялось. Из рекуррентного соотношения (20) следует, что

$$f_{n+2}f_{n+1}f_n = \alpha + \frac{\beta}{f_{n+1}}, \qquad f_{n+1}f_n f_{n-1} = \alpha + \frac{\beta}{f_n}.$$

Перемножая эти равенства, получаем, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ при любом n должны удовлетворять соотношению

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{f_{n+1}}\right)\left(\alpha + \frac{\beta}{f_n}\right) = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta},$$

которое можно переписать в виде

$$\tilde{\beta} - \alpha^2 = -\tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \alpha\beta\left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}}\right) + \frac{\beta^2}{f_n f_{n+1}}. \tag{26}$$

Правая часть этого равенства оказывается похожа на формулу (21) для инварианта T. С учётом этой формулы получаем, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ должны удовлетворять соотношению

$$\tilde{\beta} - \alpha^2 = \beta T - (\beta + \tilde{\alpha}) f_n f_{n+1}.$$

Так как произведение $f_n f_{n+1}$ может принимать разные значения, для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы $\tilde{\alpha} = -\beta$. После этого находим, что $\tilde{\beta} = \alpha^2 + \beta T$. Полученные необходимые условия на $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ являются и достаточными для того, чтобы выполнялась формула (26), равносильная уравнению (24).

§ 8. Как находить скрытые инварианты?

Найти инвариант T можно, зная теорему 5. Тот факт, что всякая последовательность Сомос-4 является и последовательностью Сомос-5, можно обнаружить экспериментально. Рассматривая произвольную последовательность Сомос-4, по её первым элементам можно найти значения предполагаемых коэффициентов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Если равенство (24) будет выполнено для многих значений n, то можно предположить, что оно, действительно, верное и попробовать его доказать. В процессе доказательства неизбежным образом появится инвариант T подобно тому, как он появился в процессе доказательства теоремы 5.

После того, как формула (21) выписана, инвариантность величины T_n можно доказать, не используя замысловатые выкладки, приведённые выше. Достаточно рассмотреть разность $T_{n+1} - T_n$ и упростить полученное выражение, используя рекуррентное соотношение (20) (ничего другого у нас нет!):

$$T_{n+1} - T_n = f_{n+1}f_n + \frac{\alpha}{f_{n+1}} + \frac{\beta}{f_n f_{n+1}} - f_n f_{n-1} - \frac{\alpha}{f_{n-1}} - \frac{\beta}{f_{n-1}f_n}. \tag{27}$$

Приведя всё к общему знаменателю, получим выражение, которое раскладывается на множители:

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{f_{n-1}f_n f_{n+1}}(f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n-1}f_n^2 f_{n+1} - \alpha f_n - \beta). \tag{28}$$

Теперь из рекуррентного соотношения (20), очевидно, следует, что $T_{n+1} - T_n = 0$.

§ 9. Ещё два доказательства целочисленности последовательности Сомос-(4)

Второе доказательство теоремы 1. Для последовательности Сомос-(4) значение инварианта T равно 4. По теореме 5 эта последовательность удовлетворяет уравнению

$$s_{n+2}s_{n-3} = -s_{n+1}s_{n-2} + 5s_n s_{n-1}. \tag{29}$$

Доказательство целочисленности последовательности Сомос-(4) будем проводить по индукции. В качестве базы будем использовать целочисленность элементов $s_0, \ldots, s_4$. Для проведения шага индукции предположим, что $n \geqslant 3$, целочисленность $s_0, \ldots, s_{n+1}$ уже доказана, и проверим, что s_{n+2} также будет целым числом. Пользуясь равенствами (6) и (29), мы можем выписать два представления для s_{n+2}:

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2}{s_{n-2}}, \quad s_{n+2} = \frac{-s_{n+1}s_{n-2} + 5s_n s_{n-1}}{s_{n-3}}.$$

Пусть d — это знаменатель того рационального числа, которое получается после сокращения этих дробей. Из первого равенства следует, что d делит s_{n-2}. Из второго равенства, — что d делит s_{n-3}. Но, согласно лемме 1, s_{n-2} и s_{n-3} — взаимно простые числа, значит, $d = 1$, и s_{n+2} — целое.

В процессе доказательства теоремы 4 для инварианта T у нас появилось представление (22). В исходных переменных s_n оно принимает вид

$$\frac{s_{n-2}s_{n+1}}{s_{n-1}s_n} + \frac{s_{n-1}s_{n+2}}{s_n s_{n+1}} + \frac{\alpha s_n^2}{s_{n-1}s_{n+1}} = T. \tag{30}$$

Это равенство можно интерпретировать как рекуррентное соотношение третьего порядка, задающее исходную последовательность $\{s_n\}$:

$$s_{n+2} = (Ts_{n+1}s_n s_{n-1} - s_{n+1}^2 s_{n-2} - \alpha s_n^3)s_{n-1}^{-2}. \tag{31}$$

С его помощью можно предъявить ещё одно доказательство теоремы 1.

Третье доказательство теоремы 1. Как отмечалось в предыдущем доказательстве, для последовательности Сомос-(4) значение инварианта T равно 4. Снова будем предполагать, что $n \geqslant 3$, и целочисленность элементов $s_0, \ldots, s_{n+1}$ уже доказана. Тогда для проверки того, что s_{n+2} — целое число, запишем равенства (6) и (31):

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2}{s_{n-2}}, \quad s_{n+2} = \frac{4s_{n+1}s_n s_{n-1} - s_{n+1}^2 s_{n-2} - \alpha s_n^3}{s_{n-1}^2}.$$

Теперь, как и во втором доказательстве теоремы 1, из взаимной простоты знаменателей s_{n-1}^2 и s_{n-2} следует, что s_{n+2} — целое число.

§ 10. Периодичность последовательностей Сомоса

Пусть $m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_l^{\gamma_l}$ — каноническое разложение числа m на простые множители. Тогда периодичность последовательности по модулю m равносильна тому, что последовательность периодична по каждому из модулей вида $p_i^{\gamma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением модулей, которые являются степенями простого числа.

Задача 11. Последовательность $\{a_n\}$ периодически повторяется по каждому из модулей $p_i^{\gamma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ будет периодической и по модулю $m = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_l^{\gamma_l}$.

Попробуем выяснить, как ведёт себя произвольная последовательность Сомос-4 по модулю p^γ, где p — простое число, и $\gamma \geqslant 1$.

Будем далее предполагать, что $\{s_n\}$ — это целочисленная последовательность. Если все элементы последовательности делятся на простое p, то от $\{s_n\}$ имеет смысл перейти к последовательности $\{s_n p^{-k}\}$, где k — максимально возможная степень p, на которую делятся все числа s_n. Такой переход равносилен изменению начальных условий, рекуррентное соотношение, задающее последовательность, при этом не изменится. Эту операцию можно проделать для всех простых чисел p. В итоге получится последовательность, все элементы которой не имеют общих делителей. Будем называть такие последовательности *примитивными.*

Теорему 2 мы докажем в следующей, немного более общей формулировке.

Теорема 6. *Пусть p — простое число, $\gamma \geqslant 1$, и $\{s_n\}$ — примитивная последовательность Сомос-4, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1), в котором $(\alpha\beta, p) = 1$. Тогда остатки, которые элементы последовательности $\{s_n\}$ дают при делении на p^γ, периодически повторяются.*

Из равенства (31) следует, что для того, чтобы значение величины T было корректно определено по модулю p^γ ($\gamma \geqslant 1$), достаточно, чтобы в последовательности $\{s_n\}$ нашлось три подряд идущих члена s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, взаимно простых с p. Оказывается, что для примитивных последовательностей (при дополнительном условии на коэффициент β) это всегда возможно. Следующее утверждение представляет собой модификацию леммы 1.

Лемма 2. *Пусть p — простое число и $\{s_n\}$ — примитивная последовательность Сомос-4, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1), в котором $(\alpha\beta, p) = 1$. Тогда в этой последовательности всегда можно выбрать три подряд идущих элемента, взаимно простых с p.*

Доказательство. Отметим сначала, что в последовательности $\{s_n\}$ не может быть двух подряд идущих элементов, кратных p. Действительно, если $p \mid s_{n-2}$ и $p \mid s_{n-1}$, то из уравнения (1) и условия $(\beta, p) = 1$ следует, что $p \mid s_n$. Повторяя это рассуждение, мы получаем, что все элементы последовательности $\{s_n\}$ делятся на p. Таким образом, сделанное предположение противоречит условию примитивности последовательности $\{s_n\}$.

Если найдутся два числа, кратные p, у которых номера отличаются на три, то снова приходим к противоречию. Действительно, если $p \mid s_{n-2}$ и $p \mid s_{n+1}$, то из уравнения (1) и условия $(\beta, p) = 1$ следует, что $p \mid s_n$. Значит, два подряд идущих элемента s_n и s_{n+1} делятся на p, что, как мы уже доказали, невозможно.

Предположим, что в последовательности $\{s_n\}$ найдутся два элемента, кратных p и идущих через один. Если $p \mid s_{n-2}$ и $p \mid s_n$, то из уравнения (1) и условия $(\alpha, p) = 1$ следует, что $p \mid s_{n-1}s_{n+1}$. Тогда p делит s_n и один из соседних элементов, что снова приводит к противоречию: на p делятся либо два соседних элемента последовательности, либо два элемента, номера которых отличаются на три.

Из доказанных утверждений следует, что номера двух элементов последовательности, делящихся на p, отличаются по крайней мере на 4. Значит, всегда можно выбрать три подряд идущих элемента, взаимно простых с p.

Следствие 2. *В условиях леммы 2 для последовательности $\{s_n\}$ корректно определено значение $T \pmod{p^\gamma}$.*

Доказательство. По лемме 2 в последовательности $\{s_n\}$ найдутся три подряд идущих элемента, взаимно простых с p. Это позволяет найти значение $T \pmod{p^\gamma}$ по формуле (30).

Отметим, что вместе с T по модулю p^γ будут корректно определены и коэффициенты $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ уравнения (24), см. формулы (25).

Доказательство теоремы 6. Проверим, что значение $s_{n+2} \bmod p^\gamma$ однозначно определяется остатками, которые при делении на p^γ дают s_{n+1}, s_n, s_{n-1}, s_{n-2}, s_{n-3}. Действительно, для нахождения $s_{n+2} \bmod p^\gamma$ будем применять рекуррентные соотношения (1) и (24), записанные в виде

$$\begin{aligned} s_{n+2} &\equiv (\alpha s_{n+1}s_{n-1} + \beta s_n^2)s_{n-2}^{-1} \pmod{p^\gamma}, \\ s_{n+2} &\equiv (\widetilde{\alpha} s_{n+1}s_{n-2} + \widetilde{\beta} s_n s_{n-1})s_{n-3}^{-1} \pmod{p^\gamma}. \end{aligned} \tag{32}$$

Первое из них имеет смысл, если $(s_{n-2}, p) = 1$. Второе, — если $(s_{n-3}, p) = 1$. Но хотя бы одно из этих условий вседа выполнено, т. к. два соседних элемента последовательности $\{s_n\}$ не могут делиться на одно и то же простое число p одновременно (см. доказательство леммы 2).

Теперь остаётся повторить те рассуждения, которые мы вспоминали при доказательстве периодичности линейных рекуррентных последовательностей. Если мы рассмотрим первые $p^{5\gamma}$ пятёрок вида $(s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n, s_{n+1})$, то среди них найдутся по крайней мере две, в которых все пять чисел дают одни и те же остатки от деления на p^γ. Из формул (32) следует, что последовательность по модулю p^γ зациклится.

Замечание 3. Для доказательства теоремы 6 вместо рекуррентного соотношения пятого порядка (24) можно использовать рекуррентное соотношение четвёртого порядка

$$s_{n+2}s_{n-1}^2 = Ts_{n-1}s_ns_{n+1} - s_{n-2}s_{n+1}^2 - \alpha s_n^3,$$

получающееся из равенства (30) умножением на $s_{n-1}s_ns_{n+1}$.

Задача 12. Докажите, что в теореме 6 нельзя отбросить условие $(\alpha\beta, p) = 1$.

Задача 13. Докажите, что в последовательности Сомос-(4) нет чисел, делящихся на 5.

§ 11. Последовательности Гейла — Робинсона

Существует гипотеза, что многочисленные свойства, справедливые для последовательностей Сомос-4 и Сомос-5, будут выполняться и для *последовательностей Гейла — Робинсона*, которые задаются рекуррентными соотношениями двух типов:

$$s_ns_{n-k} = \alpha s_{n-l}s_{n-k+l} + \beta s_{n-m}s_{n-k+m},$$

где $0 < l < m < k$, или

$$s_ns_{n-k} = \alpha s_{n-p}s_{n-k+p} + \beta s_{n-q}s_{n-k+q} + \gamma s_{n-r}s_{n-k+r},$$

где $0 < p < q < r < k$, и $p+q+r = k$. Нетрудно видеть, что последовательности Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$ являются частными случаями последовательностей Гейла — Робинсона.

С ростом порядка k ситуация сильно усложняется, но для малых k численные эксперименты подтверждают гипотезу. Начиная с $k = 6$ исследование последовательностей Гейла — Робинсона может привести к новым интересным результатам.

Задачи

Задача 14. Пусть последоватльность Сомос-5 задана рекуррентным соотношением

$$s_{n+3}s_{n-2} = \tilde{\alpha} s_{n+2}s_{n-1} + \tilde{\beta} s_{n+1}s_n. \tag{33}$$

Проверьте, что в переменных f_n это соотношение записываетя в виде

$$f_{n-1}f_n^2 f_{n+1}^2 f_{n+2} = \tilde{\alpha} f_n f_{n+1} + \tilde{\beta}. \tag{34}$$

Докажите, что следующие числа являются инвариантами последовательности Сомос-5:

$$\begin{gathered} I = I_n = f_{n-1}f_nf_{n+1} + \tilde{\alpha}\left(\frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}}\right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_nf_{n+1}}, \\ J = J_n = f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} + \tilde{\alpha}\left(\frac{1}{f_{n-1}f_n} + \frac{1}{f_nf_{n+1}}\right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_n^2f_{n+1}}. \end{gathered} \tag{35}$$

Докажите также справедливость равенств

$$I = f_{n-1}f_nf_{n+1} + f_nf_{n+1}f_{n+2} + \tilde{\alpha}\left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}}\right), \tag{36}$$

$$J = f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_nf_{n+1}}. \tag{37}$$

Задача 15. С помощью каждой из формул (36), (37) докажите, что все элементы последовательности Сомос-(5) — целые числа.

Задача 16. Пусть m — натуральное число, и $\{s_n\}$ — это последовательность Сомос-(5). С помощью формул (36), (37) докажите, что остатки, которые элементы последовательности $\{s_n\}$ дают при делении на m, периодически повторяются.

Задача 17*. (см. [8]) Докажите, что для любого решения s_n рекуррентного соотношения (33) подпоследовательности с чётными и нечётными номерами $s_n^* = s_{2n}$ и $s_n^* = s_{2n+1}$ удовлетворяют уравнению Сомос-4

$$s_{n+2}^*s_{n-2}^* = \alpha^* s_{n+1}^* s_{n-1}^* + \beta^*(s_n^*)^2, \tag{38}$$

в котором $\alpha^* = \tilde{\beta}^2$, $\beta^* = \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^3 + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}J)$.

Задача 18*. (см. [8]) Докажите, что последовательность Сомос-5, задаваемая уравнением (33) и обладающая инвариантами I и J, будет последовательностью Сомос-4 тогда и только тогда, когда $I^2 = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$.

Задача 19. Докажите, что умножив элементы последовательности Сомос-5 с чётными номерами на некоторое комплексное число, можно получить последовательность Сомос-4.

Задача 20*. Докажите, что для любой последовательности Сомос-4 её подпоследовательности с чётными и нечётными номерами $\{s_{2n}\}$ и $\{s_{2n+1}\}$ также являются последовательностями Сомос-4.

Задача 21*. (см. [11]) Докажите, что элементы последовательности Сомос-(4) удовлетворяют сравнению

$$s_ns_{n+6}^2 + s_{n+2}^2s_{n+8} \equiv 0 \pmod{s_{n+4}}.$$

С помощью этого сравнения докажите, что для любого n числа s_n и s_{n+4} взаимно просты.

Задача 22*. (см. [11]) Докажите, что элементы последовательности Сомос-(5) удовлетворяют сравнению

$$s_n s_{n+7} s_{n+8} + s_{n+2} s_{n+3} s_{n+10} \equiv 0 \pmod{s_{n+5}}.$$

Докажите, что при $0 < |k-l| \leqslant 5$ числа s_k и s_l взаимно просты.

Список литературы

[1] Васильев Н., Гексаграммы Паскаля и кубические кривые. Квант, № 8. 1987.

[2] Егоров А. Деление с остатком и сравнение по модулю. Квант, № 6. 1991.

[3] Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности. ГИТТЛ, 1950 (Популярные лекции по математике, No. 1).

[4] Ю. Соловьев Арифметика эллиптических кривых. Квант № 7, 1987.

[5] Ю. Соловьев Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма. Квант № 4, 1999.

[6] Тихомиров, В. М. Великие математики прошлого и их великие теоремы. МЦНМО, Москва, 1999.

[7] Устинов А. В. Элементарный подход к изучению последовательностей Сомоса Тр. МИАН , том 305 (2019), 330–343.

[8] Устинов, А. В. О последовательностях Сомос-4 и Сомос-5 Математические заметки, 2021, 110: 3, 478–480.

[9] Gale D. Tracking the automatic ant and other mathematical explorations. A collection of mathematical entertainments columns from the Mathematical Intelligencer. New York, NY: Springer, 1998.

[10] van der Poorten A. J., Swart C. S. Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k. Bull. Lond. Math. Soc., Oxford University Press, Oxford; London Mathematical Society, London, 2006, 38, 546-554.

[11] Robinson, R. M. Periodicity of Somos sequences. Proc. Am. Math. Soc., American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1992, 116, 613-619

[12] Somos, M. Step into the Elliptic Realm 2000 `http://somos.crg4.com/step.txt`

А. В. Устинов (A. V. Ustinov)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: ustinov.alexey@gmail.com