О дзета-функциях
Дубна, 2023

Лекция 1, 19 июля
Дзета-функция Римана и её обобщения

Версия 18 июля 2023

1.0. Историческое введение

1.0.0. Кавальери и Менголи. Один из классиков итальянского Возрождения, Бонавентура Кавальери (1598 – 1647)

– прямой наследник Архимеда[1] в европейской математике. Он ввёл понятие *неделимых* и издал фундаментальный труд [**Кавальери1940**]; некоторые методисты считают (см., например, [**Ситкин2011**]), что и сейчас, четыре века спустя, целесообразно преподавать объёмы на основе *принципа Кавальери*[2]. С помощью своего принципа Кавальери получил несколько формул, которые на современном языке имеют вид

$$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

но результатов, которые в XXI-м веке представлялись бы содержательными, видимо, не оставил.

---

[1] Сравнение принадлежит Галилею, состоявшем с Кавальери в обширной научной переписке и настоятельно рекомендовавшим его на должность профессора в Болонский Университет.

[2] Я придерживаюсь противоположного мнения: не только за тысячи лет после Архимеда, но и за сотни после Кавальери понятие *интеграла* прояснилось, и следует учить ему в соответствии с современным пониманием. Такая возможность была реализована в учебниках А.Н. Колмогорова – впрочем, отвергнутых педагогическим сообществом.

Для нас Кавальери наиболее интересен своим учеником, гораздо менее известным математиком Пьетро Менголи (1626 – 1686)

.

Из не очень впечатляющих (нас) результатов Менголи отметим *расходимость гармонического ряда*; этот и другие результаты, которые мы будем упоминать, опубликованы в [**Mengoli1650**].

Как этот исключительно упорный математик писал[3] в 1672, он *с юности изучал квадратуру круга, самую желанную проблему Геометрии*[4], понимая её как тщательное изучение площади полукруга диаметра 1, выражаемой на нашем языке интегралом

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x.$$

Одно из несомненных достижений Менголи – включение этого интеграла в семейство интегралов

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x,$$

где $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ – целые или полуцелые числа. Тем самым был сделан важный шаг на пути экстраполяции B-функции Эйлера на "произвольные" (вещественные или комплексные) значения аргументов, причём за 70 лет до него! Менголи изучил соотношения между своими интегралами для всевозможных значений параметров, по существу построив аналог треугольника Паскаля для полуцелых чисел. Это позволило получить замечательное по тем временам приближение π с 11 десятичными знаками[5],

$$\pi = 3.14159265359...$$

По ходу дела (что, разумеется, не менее замечательно) он получил неравенства

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots} < \frac{4}{\pi} < \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\ldots},$$

по существу равносильные *формуле Валлиса*, полученной примерно тогда же, в 1655 (вспомним могилу Архимеда: снова трансцендентное связывается с рациональным, если только научиться правильно обращаться с бесконечностью).

Мы немного поговорили о достижениях Менголи не потому, что они имеют отношение к нашему курсу, а чтобы показать, что он был усердным и сильным

[3] Оригиналы работ Менголи труднодоступны. Я пользуюсь сведениями из работы [**Rosa2009**] и благодарю её первого автора за ссылки и разъяснения.

[4] *Cercai, fino da giovinetto, il Problema Della quadratura del Circolo, il piú desiderato di tutti nella Geometria,...*

[5] Другие результаты XVII-го века: в 1621 году Снеллиус с помощью правильного 96-угольника посчитал 7 знаков π, но обосновано это было только в 1654 году Гюйгенсом.

математиком (он работал в обозначениях, которые понимать очень трудно, но это отношения к делу не имеет). Теперь мы переходим к вопросу, который он поставил и на который на который ему, видимо, очень хотелось ответить – однако не удалось! Именно с этого вопроса начинается наш курс.

С помощью своих интегралов Менголи вычислил несколько симпатичных сумм, начиная с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Для него это была сумма

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x)^3\mathrm{d}x + \dots =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots = 1.$$

Естественно, однако, предположить, что он знал и другой вывод, основанный на тождестве $\frac{1}{n(n+1)} \equiv \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \dots = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} \\ + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \\ + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \\ + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} \\ \dots \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме первого, "очевидно" сокращаются.

Законно ли такое обращение с *бесконечными* суммами/разностями? Вдумчивый ученик Кавальери (если всё это действительно было – напомню, что мы обсуждаем историческую фантазию) не мог не задуматься об этом. Тем более что работать со знакопеременными бесконечными суммами так, как естественно было бы с конечными (чтобы минимизировать количество вычитаний)

$$a - b + c - d + e - f \dots = a + c + e + \dots - (b + d + f + \dots)$$

в рассматриваемом случае незаконно – это Менголи, получивший признание благодаря установлению *расходимости гармонического ряда*, знал точно.

На самом деле и утверждение, и его обоснование безупречны; однако понятия, позволяющие придавать приведённым понятиям, операциям и рассуждениям точный смысл, разрабатывались в течение более чем двух столетий после Менголи. Предстояло дать определения числам, последовательностям, сходимости и абсолютной сходимости.

Мы опускаем исследованные Менголи (также с помощью его интегралов) суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n+1)\binom{m+n}{n}} = \frac{1}{m},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}$$

– см. [**Rosa2009**]. Вместо этого продолжим исторические фантазии: предположим, Менголи от суммы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ перешёл бы к сумме $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\frac{1}{2})}$. С помощью тождества $\frac{1}{n(n+\frac{1}{2})}\equiv 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$ он бы вычислил

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\frac{1}{2})}=2\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\big)=4\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\big)=$$

$$=4\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\pm\dots\Big)=4-4\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\mp\dots\Big)=4-4\log 2,$$

использовав ряд *Ньютона-Меркатора*

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\dots$$

при $x=1$.

Сугубо временно введём *функцию Менголи*

$$\mathrm{Meng}(t):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+t)}.$$

Пока мы установили

$$\mathrm{Meng}(1)=1,$$

$$\mathrm{Meng}\Big(\frac{1}{2}\Big)=4-4\log 2=1.227...,$$

Мой компьютер (точнее, MAPLE) вычисляет ещё два значения

$$\mathrm{Meng}\Big(\frac{1}{3}\Big)=9-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{9}{2}\log 3=1.335...$$

и

$$\mathrm{Meng}\Big(\frac{1}{4}\Big)=16-12\log 2-2\pi=1.399...,$$

а с $\mathrm{Meng}\big(\frac{1}{5}\big)$ уже не справляется...

Зачем я всё это рассказываю? В меньшей степени – просто чтобы показать красивую математику XVII-го века. В основном же – чтобы проложить путь к вопросу

$$\mathrm{Meng}(0)=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=???}$$

о *сумме обратных квадратов*, с которого и начинается наш курс. Хотя Пьетро Менголи на него и не ответил, он этот вопрос <u>поставил</u>. Таков, видимо, главный (и очень существенный!) вклад в Математику почти забытого итальянца, которому мы уделили некоторое внимание.

1.0.1. Базельская задача, Эйлер. Вопрос *ЧЕМУ равна сумма обратных квадратов?* поставлен не очень точно. В наше время аналогична ситуация с *суммой обратных кубов*: мы не знаем, выражается ли она через какие-нибудь другие известные нам величины. Но в XVII-м веке ведущие математики верили, что сумму обратных квадратов можно ВЫЧИСЛИТЬ – и оказались правы.

Однако для подтверждения этой веры пришлось дожидаться XVIII-го века.

После Менголи (во многих источниках утверждается, что он сформулировал свой вопрос в 1644) математики доказывали сходимость суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, получали некоторые её оценки (довольно слабые, потому что сходится ряд медленно) но большего достичь им не удавалось – в чём, например, публично признался Якоб Бернулли в 1689. Вообще семейство Бернулли усердно занимались этим числом (см. [**Bernoulli1713**]), в связи с чем установление его "точного" значения стало называться *Базельской задачей* по месту жительства знаменитого семейства.

Тем сенсационнее было полученное **Эйлером** в 1734 году решение Базельской задачи:

$$\boxed{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$$

Оно было доложено в Санкт-Петербургской Академии Наук 5 декабря 1735 и опубликовано в [**Euler1740**]. Часто ссылаются на статью [**Euler1768**], вышедшую в Берлине много лет спустя.

Доказательство Эйлера основано на тождестве

$$\sin(\pi x) \equiv \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \tag{$\bigstar$}$$

которое он понимал как равенство "многочленов бесконечной степени", основанное на совпадении множеств их корней: в данном случае это – множество целых чисел. В вещественной области это совпадение мало о чём говорит (например, не редкость многочлены с *пустыми* множествами корней), и Эйлеру было нелегко обосновать равенство ($\bigstar$). Если же выйти в комплексную область (это действие стало само собой разумеющимся лишь в XIX веке), то равенство становится почти очевидным (конечно, на основе весьма развитой *теории функций комплексной переменной*, ТФКП).

Дело в том, что и левая, и правая часть равенства ($\bigstar$) задают *целые* функции, то есть *всюду сходящиеся степенные ряды* – это было нетрудно установить и во времена Эйлера. А одна из теорем ТФКП утверждает, что две целые функции с совпадающими множествами нулей могут отличаться разве что умножением на экспоненту от ещё одной целой функции. Но частью ТФКП является теория *роста* целых функций, и он подчиняется принципу *чем реже корни, тем медленнее рост* (это – бесконечный аналог элементарного принципа *чем меньше у многочлена корней, тем меньше его степень*). В случае же ($\bigstar$) корни достаточно редки; умножение на экспоненту многочлена хотя бы второй степени увеличило бы рост функций, а умножение на экспоненту многочлена первой нарушило бы чётность. Таким образом, левая и правая части ($\bigstar$) пропорциональны, и рассмотрение производных при $x = 0$ завершает доказательство.

Для решения Базельской задачи остаётся применить к ($\bigstar$) "формулы Виета", то есть "раскрыть ВСЕ скобки" в правой части. Здесь надо проявить очередную осторожность при работе с *актуальной* бесконечностью: раскрывая скобки в

$$\pi x\Big(1-\frac{x^2}{1^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{3^2}\Big)\dots,$$

из почти всех (то есть всех, кроме конечного числа) скобок надо взять 1, и только из конечного числа $-\frac{x^2}{n^2}$, и учесть $1\cdot1\cdot1\cdots=1$. Так, чтобы получить в правой части ($\bigstar$) коэффициент при x^3, надо взять 1 из всех скобок, кроме ровно одной. Поскольку разложение синуса в ряд Тейлора было известно задолго до Эйлера, сравнение коэффициенты при x^3 в левой и правой частях ($\bigstar$) даёт

$$-\frac{\pi^3}{3!}=-\pi\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\Big),$$

а это и есть результат Эйлера.

На самом деле из разложения синуса в произведение вытекает бесконечно более глубокий вывод, чем решение Базельской задачи: при любом чётном положительном $k\in\mathbb{N}_{>0}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\in\mathbb{Q}\pi^{2k}}$$

Рациональные множители при π^{2k} называются *числами Бернулли* – к сожалению, с точностью до некоторых нормировочных множителях, которые в современной литературе не устоялись. Мы будем впоследствии пользоваться для них другими обозначениями, не вызывающими разночтений, а пока в задаче **1.12** предлагаем вывести для них рекуррентные соотношения.

Начинающему будет полезно тем же методом, которым Эйлер решил Базельскую задачу, установить равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Из уже приведённых результатов можно вывести соотношения, которые, вероятно, восхитили бы Менголи и любого Бернулли:

$$\frac{\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big)^4}{\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\big)^2}=\frac{25}{4},$$

$$\frac{\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\big)^3}{\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\big)^2}=\frac{49}{40}$$

и другие.

555555555555555555555555555555

Вместе с тем какая-то общая природа значений дзета-функции Римана в чётных и нечётных числах, видимо, существует; одно из свидетельств этому обнаружил Апери. Доказывая иррациональность $\zeta(3)$, он заодно предложил и новое доказательство иррациональности $\zeta(2)$ – разумеется, уже известной и вытекающей из формулы Эйлера и *трансцендентности* π. В обоих доказательствах использовалась *слишком хорошая* приближаемость $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ рациональными числами:

$$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} \tag{\textbf{1.2a}}$$

и

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}. \tag{\textbf{1.2b}}$$

Несколько лет назад Бейли, Борвейн и Брэдли **[BBB2006]** добавили к формулам Апери ещё одну:

$$\zeta(4) = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}. \tag{\textbf{1.2c}}$$

66666666666666666666666666666666

1.0.2. Об обобщениях. Левая часть формулы Эйлера, дающей решение базельской задачи, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{1.0.2a}$$

допускает многочисленные обобщения; некоторые из них мы сейчас упомянем.

Для начала заменим *постоянные* в выражении (1.0.2a) на *переменные.* Сам Эйлер проварьировал 2 в знаменателе этого выражения, получив *дзета-функцию Римана*

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}} \tag{1.02b}$$

Это – одна из главных героинь нашего курса. Нам уже известны значения $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

Если же проварьировать 1 в числителе, получим *дилогарифм*

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}. \tag{1.02c}$$

Используемые в настоящее время *обозначения* этих функций введены не Эйлером, а его последователями; то же касается других *высших трансцендентных* функций, с которыми он работал[6].

Обозначение ζ (как и традиционная буква s для аргумента $s \mapsto \zeta(s)$) введено *Риманом* в **[Riem1859]**. Имя Римана закрепилось за названием ζ, поскольку именно он строго определил эту функцию как мероморфную функцию *комплексной* переменной, голоморфную на $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, с помощью *аналитического продолжения,* о котором

[6]Наоборот, обозначения *элементарных трансцендентных* функций, повсеместно используемые с восемнадцатого века, введены Эйлером.

будет подробно рассказано в последующих лекциях; некоторые авторы, однако, предлагают называть эту функцию *дзета-функцией Эйлера-Римана.*

Название "дилогарифм" было введено Хиллом в [**Hill1828**]. Иногда дилогарифм называется *функцией Спенса* по имени автора работы [**Spe1809**]. Обозначение дилогарифма до сих пор не вполне устоялось – многие авторы пишут не Li_2, а L_2. Мы опираемся на современный фундаментальный справочник [**Lew1981**].

Эйлер, видимо, первым рассмотрел *дзета-функцию Римана* (1.0.2b) – не уточняя области её определения. Дилогарифм несколько старше. Формула (1.0.2c) равносильна

$$\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{\log(1-t)\mathrm{d}t}{t}, \tag{1.0.2d}$$

и этот интеграл впервые появляется в письме Лейбница Иоганну Бернулли, написанному в 1696 году; обосновать равносильность двух определений дилогарифма читателю предлагается в упражнении **1.5**. Дилогарифм изучался Абелем [**Abel1881**] в его теории функциональных уравнений (Абель жил с 1802 по 1829 годы, и указанная ссылка относится к полному собранию его сочинений). Лобачевский в [**Лоб1836**] выразил объём идеального тетраэдра в гиперболическом пространстве через функцию, которую впоследствии назвали *функцией Лобачевского* и обозначили

$$\text{л}(\phi) := -\int_0^\phi \log|2\sin u|\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\phi)}{n^2};$$

эта функция тесно связана с дилогарифмом, см. замечательный современный обзор в статье Милнора [**Mil1982**].

Формулу Эйлера (1.0.3a) мы теперь можем записать в виде

$$\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.0.2e}$$

Перед нами – простейшее соотношение между значениями дзета-функции и дилогарифма; с девятнадцатого века по настоящее время обнаруживаются его многочисленные и разнообразные обобщения, находящие применения в различных разделах математики и физики.

Один из источников получения таких обобщений – *соотношение отражения*

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) \equiv \frac{\pi^2}{6} - \log x \log(1-x), \tag{1.0.2f}$$

полученное Эйлером [**Euler1740**]; читателю предлагается обосновать его в упражнении **1.6**. Из этого соотношения, например, при $x = \frac{1}{2}$ следует, что

$$\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\log 2)^2}{2}; \tag{1.0.2g}$$

иначе говоря,

$$\frac{1}{2^1\cdot 1^2} + \frac{1}{2^2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^3\cdot 3^2} + \frac{1}{2^4\cdot 4^2} + \frac{1}{2^5\cdot 5^2} + \dots =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots\Big)^2$$

– не правда ли, красивейшая формула? Кажется, она малоизвестна... ПРОВЕРЬТЕ

ЕЁ ЧИСЛЕННО!

В работе Цагира [**Zag1988**], являющейся прекрасным обзором современной теории дилогарифма, отмечается, что у большинства транцендентных функций либо имеется бесконечное множество явно вычисляемых значений, либо их нет вовсе; у дилогарифма же их известно ровно *восемь* (включая тривиальное $\mathrm{Li}_2(0) = 0$), два из которых мы привели. Это – одна из причин, побудившая Цагира написать, что дилогарифм – единственная известная ему функция, обладающая *чувством юмора*.

Соединяя два рассмотренных обобщения, мы придём к понятию *полилогарифма*

$$\mathrm{Li}_s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \tag{1.0.2h}$$

называемого также *функцией Жонкьера* по имени автора работы [**Jonq1889**]. Мы не будем уточнять области определения этой функции двух переменных; обычно она рассматривается при натуральных s.
Полилогарифмы связывают между собой разнообразные области современной математики, иногда кажущиеся на первый взгляд очень далёкими друг от друга. В качестве одного из очень многих примеров упомянем работу [**Gon2005**].

Ещё в одном направлении дзета-функцию Римана обобщает *дзета-функция Гурвица*

$$\zeta(s,q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^s}. \tag{1.0.2i}$$

От изобилия связанных с ней классических формул разбегаются глаза; ограничимся приведением одной, предваряющей изучение связи $\zeta(s)$ с $\zeta(1-s)$:

$$\zeta(1-s,q) = \frac{1}{2s}\left(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}s/2}\beta(q;s) + \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}s/2}\beta(1-q;s)\right), \tag{1.0.2j}$$

где

$$\beta(q;s) := 2\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nq}}{(2\pi n)^s} = \frac{2\Gamma(s+1)}{(2\pi)^s}\mathrm{Li}_s(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q}). \tag{1.0.2k}$$

Областей определения мы пока не уточняем, подразумевая аналитические продолжения. В задаче **1.6** предлагается поработать с дзета-функцией Гурвица при $q = \frac{1}{2}, s = 2$, заодно "вычислив"

$$.5 + 1.5 + 2.5 + 3.5 + \dots .$$

Все рассмотренные обобщения суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ перекрываются *трансцендентой Лерха*

$$\Phi(x,s,q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+q)^s}, \tag{1.0.2l}$$

введённой в работе [**Ler1887**]. Для неё известно интегральное представление

$$\Phi(x,s,q) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}\mathrm{e}^{-qt}}{1 - x\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t. \tag{1.0.2m}$$

Завершая разговор о далёкой и близкой истории предмета, подчеркнём его необъятность, представление о которой я пытался дать, приводя разрозненные примеры. Чтобы не утонуть в океане формул, предлагается придерживаться современных точек зрения, к чему мы и переходим.

1.1. Дзета-функции коммутативных колец

1.1.0. Определение. Пусть A – произвольное *кольцо*; здесь и далее под этим термином мы всегда подразумеваем *коммутативное кольцо с единицей.* Введя нестандартное обозначение

$$\mathrm{idl}(A) := \{\text{идеалы кольца} A\},$$

считая, как принято, запись $\mathfrak{a} \triangleleft A$ синонимичной записи $\mathfrak{a} \in \mathrm{idl}(A)$ и договорившись (как не очень принято), что $A \triangleleft A$, перепишем определение дзета-функции Римана в виде

$$\zeta(s) := \sum_{\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\#\left(\frac{\mathbb{Z}}{\mathfrak{a}}\right)\right)^s}. \tag{1.1.0a}$$

Здесь вопрос может вызвать нулевой идеал $\mathfrak{a} = 0$; но, не уточняя сегодня *области определения* функции ζ, мы интуитивно считаем, что s – "большое" число, и это позволяет во всех случаях, когда фактор-кольцо $\frac{A}{\mathfrak{a}}$ бесконечно, положить $\frac{1}{\#\left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)} := 0$.

Функцию, определённую формулой, обобщающей (1.1.0a), можно ввести для *любого* кольца A, положив

$$\underline{\zeta}_A(s) := \sum_{\mathfrak{a} \triangleleft A} \frac{1}{\left(\#\left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)\right)^s} \tag{1.1.0b}$$

(наши обозначения, не всегда стандартные, будут объясняться по мере расширения предметов, рассмотрения, а пока лишь отметим очевидное $\underline{\zeta}_{\mathbb{Z}} = \zeta$).

Возможны неинтересные случаи – например, очевидно, что

$$\underline{\zeta}_{\mathbb{C}[z]} \equiv 1.$$

С другой стороны, для *некоторых* колец A область сходимости правой части выражения (1.1.0b) может оказаться *пустой*; например, можно показать, что та обстоит дело для кольца

$$\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \dots]$$

многочленов от счётного множества переменных над конечным полем.

Далее мы будем рассматривать лишь такие кольца A, что область сходимости выражения (1.1.0b) *не*пуста; она всегда окажется сдвинутой правой полуплоскостью. Один из классов таких колец, свойства которых близки к свойствам кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ – класс *дедекиндовых* колец.

1.1.1. Случай кольца $\mathbb{Z}$. Здесь нет нового предмета для обсуждения. Как уже было в скобках замечено,

$$\underline{\zeta}_{\mathbb{Z}} = \zeta$$

– дзета-функция Римана, одно из главных действующих лиц курса, которому будет уделено значительное внимание.

1.1.2. Случай кольца $\mathbb{F}_q[x]$ многочленов над конечным полем. Вычислим дзета-функцию "неклассического" кольца, больше всего напоминающего кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ – кольца многочленов над конечным полем, $\mathbb{F}_q[x]$.

Введём для произвольного поля $\Bbbk$ обозначения

$$\Bbbk[x]^{\mathsf{monic}} := \{\text{многочлены со старшим коэффициентом } 1\} \subset \Bbbk[x]$$

и

$$\Bbbk[x]_d := \{f \in \mathbf{k}[x] \mid \deg f = d\},$$
$$\Bbbk[x]_d^{\mathsf{monic}} := \Bbbk[x]_d \bigcap \Bbbk[x]^{\mathsf{monic}}.$$

Очевидно,

$$\#\Big(\Bbbk[x]_d^{\mathsf{monic}}\Big) = q^d. \qquad (1.1.2a)$$

На будущее введём также обозначение

$$\Bbbk[x]^{\mathsf{irr}} := \{\text{неприводимые многочлены}\} \subset \Bbbk[x].$$

Теорема. $\boxed{\underline{\zeta}_{\mathbb{F}_q[x]}(s) = \dfrac{1}{1-q^{1-s}}}$

Доказательство. Поскольку $\mathbb{F}_q[x]$ – кольцо главных идеалов, все его идеалы $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{F}_q[x]$ имеют вид

$$\mathfrak{a} = f\mathbb{F}_q[x], \qquad (1.1.2b)$$

где $f \in \mathbb{F}_q[x]$. Поскольку такой f определён с точностью до умножения на $\mathbb{F}_q^\times$, можно считать, что

$$f \in \mathbb{F}_q[x]^{\mathsf{monic}}, \qquad (1.1.2c)$$

и тогда такой элемент определён однозначно. Наконец, для любого $f \in \mathbb{F}_q[x]$

$$\#\left(\frac{\mathbb{F}_q[x]}{f\mathbb{F}_q[x]}\right) = q^{\deg f} \qquad (1.1.2d)$$

– надо рассмотреть векторное $\mathbb{F}_q$-пространство остатков от деления на f.

В силу этих замечаний

$$\underline{\zeta}_{\mathbb{F}_q[x]}(s) =_{(1.1.0b)} \sum_{\mathfrak{a}\lhd\mathbb{F}_q[x]} \frac{1}{\left(\#\left(\frac{\mathbb{F}_q[x]}{\mathfrak{a}}\right)\right)^s} =_{(1.1.2b,1.1.2c)} \sum_{f\in\mathbb{F}_q[x]^{\mathsf{monic}}} \frac{1}{\left(\#\left(\frac{\mathbb{F}_q[x]}{f\mathbb{F}_q[x]}\right)\right)^s} =_{(1.1.2.d)}$$

$$= \sum_{f\in\mathbb{F}_q[x]^{\mathsf{monic}}} \frac{1}{q^{s\deg f}} = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{f\in\mathbb{F}_q[x]_d^{\mathsf{monic}}} \frac{1}{q^{sd}} =_{(1.1.2a)} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^d}{q^{sd}} = \sum_{d=0}^{\infty} q^{(1-s)d} = \frac{1}{1-q^{1-s}} \blacksquare$$

Важное переобозначение. Осуществив замену переменной

$$T = q^{-s}$$

и введя для любой $\mathbb{F}_q$ алгебры A функцию

$$\underline{\mathsf{Z}}_A(T) := \underline{\zeta}_A(s),$$

где буква Z – это *заглавная дзета*, перепишем доказанную формулу в виде

$$\boxed{\underline{\mathsf{Z}}_{\mathbb{F}_q[x]}(T) = \frac{1}{1-qT}} \tag{1.1.2e}$$

Рациональность этой функции по T является простейшим примером одного из главных результатов теории, первой из серии *гипотез Вейля*, доказанной *Дворком.*

Список литературы

[Abel1881] N.- H. Abel, *Note sur la fonction* $\psi x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ldots$. In Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel, Nouvelle édition publée aux frais de l' Etat Norvégien, par MM. L. Sylow et S. Lie, vol. 2, pp. 189-193. Christiana: Grondahl and Son..

[Bernoulli1713] Jakob Bernoulli, *Tractatus de seriebus infinitis.* Basel, 1713.

[Euler1740] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, 123-134.

[Euler1768] Leonhard Euler, *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques.* Memoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 1768, pp. 83-106.

[Gon2005] A. Goncharov, *Polylogarithms, regulators, and Arakelov motivic complexes.* J. Amer. Math. Soc., 18 (2005), no. 1, 1-60.

[Hill1828] C.J. Hill, *Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale.* J. Reine Angew. Math. 3, 1828, 101-159.

[Jaeger2002] M. Jaeger, *Cicero and Archimedes' Tomb.* The Journal of Roman Studies, Volume 92, pp. 49-61.

[Jonq1889] A. Jonquiére, *Note sur la série* $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$. Bull. Soc. Math. France 17, 1889, 142-152.

[Ler1887] M. Lerch, *Note sur la fonction* $\mathfrak{R}(w,x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}x}}{(w+k)^s}$. Acta Math. 11, 1887, 19-24.

[Lew1981] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions.* Elsevier, 1981.

[Mengoli1650] Pietro Mengoli, *Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum.* Bologna, 1650.

[Mil1982] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: The first 150 years.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 6:1, 1982, 9-24.

[Riem1859] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671–680..

[Rosa2009] Ma Rosa Massa Esteve and Amadeu Delshams, *Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works.* Arch. Hist. Exact Sci. (2009) 63:325–356.

[Spe1809] W. Spence, *An essay of the theory of the various orders of logarithmic transcendents; with an inquiry into their applications to the integral calculus and the summation of series.* London: J. Murray, 1809.

[Zag1988] D. Zagier, *The Dilogarithm function in Geometry and Number Theory.* Number Theory and related topics, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 12 Bombay (1988), 231 - 249.

[АКП2019] Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин, *Математическая составляющая.* М. : Фонд «Математические этюды», 2019.

[Архимед1823] *Архимеда две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы.* Перевод с греческого (леммы с латинского) Ф. Петрушевского с примечаниями и дополнениями. — СПб., 1823.

[Кавальери1940] Бонавентура Кавальери, *Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного.* Перевод со вступительной статьей и примечаниями С. Я. Лурье. М.— Л.: Изд. технико-теоретической литературы, 1940.

[**Лоб1836**] Н.И. Лобачевский, *Применения воображаемой геометрии к некоторым интегралам.* Учёные записки Казанского Университета, 1836.

[**Ситкин2011**] Е.М. Ситкин, *Принцип Кавальери в вычислении объёмов и теорема о покрытии круга.* Сибирский педагогический журнал, Новосибирск, 2011.

[BBB2006] D. Bailey, J.M. Borwein, and D. Bradley, Experimental Determination of Apéry-like Identities for $\zeta(2n+2)$. Experiment. Math., 15:3 (2006), 281-290.