

Разбиения многообразий на ручки.
В сторону теоремы об h -кобордизме

Задачи к лекции 4:
Операции над ручками
23 июля 2023

Задача 1. Пусть функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт некоторое разложение M на ручки. Проверьте, что то же разбиение является разбиением на ручки для функции $-f$, и при этом соответствии ручка индекса k станет ручкой индекса $m - k$.

Задача 2. (а) Пусть в разложении M на ручки присутствуют ручки h^0 и h^1 , такие что только один конец h^1 приклеен к h^0 . Покажите, что эту пару ручек можно удалить.

(б) Покажите, что у любого связного многообразия существует разложение на ручки, содержащее ровно одну ручку индекса 0.

Задача 3. Дан комплекс

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}^{d_{k+1}} \xrightarrow{d_{k+1}} \mathbb{Z}^{d_k} \xrightarrow{d_k} \mathbb{Z}^{d_{k-1}} \xrightarrow{d_{k-1}} \dots$$

с тривиальными гомологиями (т.е. $\ker d_k = \operatorname{im} d_{k+1}$ для всех k). Докажите, что в модулях \mathbb{Z}^k можно одновременно выбрать такие базисы, в которых все операторы d_k будут записываться диагональными матрицами, причём на диагонали стоят нули и единицы.

Задача 4. Пусть $\gamma : S^1 \rightarrow M$ — гладкая несамопересекающаяся кривая, причём $\pi_1(M)$ тривиальна.

(а) Покажите, что если $m > 4$, то существует вложенный в M диск с границей γ .

(б) Приведите пример односвязного четырёхмерного многообразия и кривой, для которых это не так.