Разбиения многообразий на ручки.
В сторону теоремы об h-кобордизме

Задачи к лекции 1:
Многообразия и функции Морса

19 июля 2023

Задача 1. **(a)** Для трёхмерной сферы S^3 отметим в каждой точке все касательные вектора единичной длины. Покажите, что полученное подмножество $E \subset TS^3$ гомеоморфно $S^2 \times S^3$. Оно называется *сферизацией касательного расслоения.*

(b) Докажите, что аналогичный факт для двумерной сферы неверен[1].

Задача 2. Вычислите размерность грассманиана $\mathrm{Gr}(4, 2)$.

Определение. *Строгой функцией Морса* на многообразии M называется функция $M \to \mathbb{R}$, такая что все её критические точки невырождены, а значения в них различны.

Задача 3. Докажите, что любая строгая функция Морса f **(a)** на сфере S^2 **(b)** на связной сумме g торов может быть получена как функция высоты при некотором вложении данной поверхности в $\mathbb{R}^3$.

(c) Покажите, что для любого многообразия M и функции Морса $f : M \to \mathbb{R}$ существует вложение в евклидово пространство $i : M \to \mathbb{R}^d$, такое что $f = h \circ i$, где $h(x_1, \ldots, x_d) = x_1$. (Другими словами, покажите что f может быть получена как функция высоты при вложении M в некоторое $\mathbb{R}^d$.)

Задача 4. Докажите, что любая функция Морса на связной сумме торов имеет чётное число критических точек.

Задача 5. Задайте на торе функцию Морса хотя бы с 6 критическими точками и постройте соответствующее разложение на ручки.

[1] по той причине, что сферизация касательного расслоения к S^2 гомеоморфно $\mathbb{RP}^3$, а не $S^1 \times S^2$