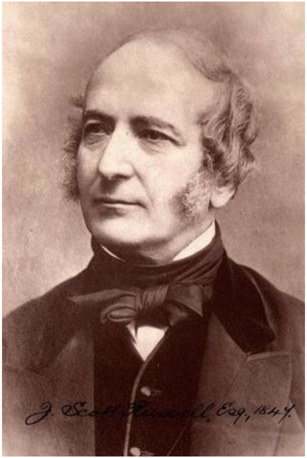
Многоликие солитоны

Что посмотреть?

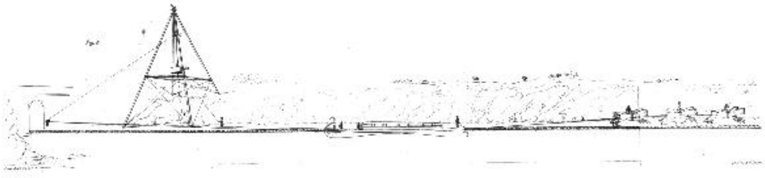
- Дубнинские лекции И. М. Кричевера (2010, 2021)
- Курс Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019 (+записки)
- +Подборка ссылок на диске О:

История



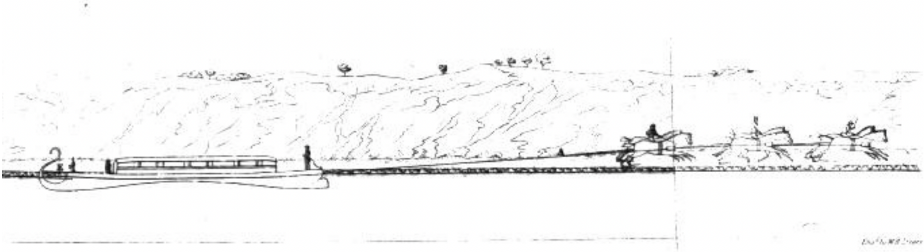
Джон Скотт Расселл (1808–1882), шотландский инженер и кораблестроитель.

История



John Scott Russell, Experimental Researches into the Laws of Certain Hydrodynamical Phenomena ..., *Edin. Roy Soc Trans* XIV, 1840, 47-109, plus Plates I and III.
Источник: http://www.ma.hw.ac.uk/∼chris/scott_russell.html

История



John Scott Russell, Experimental Researches into the Laws of Certain Hydrodynamical Phenomena ..., *Edin. Roy Soc Trans* XIV, 1840, 47-109, plus Plates I and III.

Источник: http://www.ma.hw.ac.uk/∼chris/scott_russell.html

История

> I believe I shall best introduce this phænomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phænomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.

John Scott Russell, Report on Waves, 1844.

История

A small part of the range is sufficient for this purpose, and the remainder is perfectly adapted for purposes of accurate observation, as it continues to travel along its path long after the secondary waves have ceased to exist. The *longevity of the wave of the first order*, and the facility of observing it, may be judged of from the following experiments, made in 1835–1837.

Ex. 1. A wave of the first order, only 6 inches high at the crest, had traversed a distance of 500 feet, when it was first made the subject of observation. After being transmitted along a further distance of 700 feet, another observation was noted, and it was observed still to have a height of 5 inches, and to have travelled with a velocity of 7·55 miles an hour.

Ex. 2. A wave of the first order, originally 6 inches high, was transmitted through a distance of 3200 feet, with a mean velocity of 7·4 miles an hour, and at the end of this path still maintained a height of 2 inches.

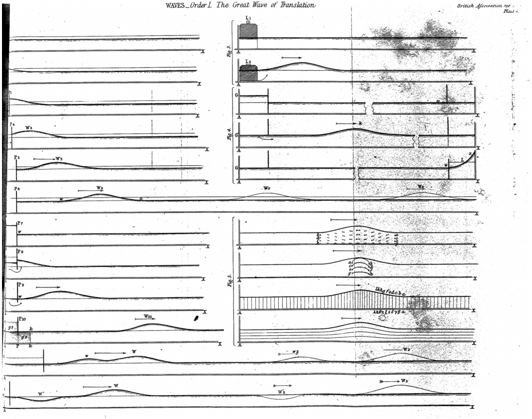
Ex. 3. A wave 18 inches high, moving at the rate of 15 miles an hour, in a channel 15 feet deep, had still a height of 6 inches, having traversed the same space in 12 minutes.

Ex. 4. Among small experimental waves of the first order, in small channels, I have selected one, which, whose crest being 1·34 inch high, in a channel 5·10 inches deep, was transmitted through a range of 1360 feet, and still admitted of accurate observation.

These examples serve to convey an accurate idea of the longevity of a wave of the first order. And this longevity appears to increase with the depth and the breadth of the channel, and with the height of the wave crest.

John Scott Russell, Report on Waves, 1844.

История



John Scott Russell, Report on Waves, 1844.

История

TABLE III.

Determination of the Velocity of the Wave of the First Order, from observation. (See Seventh Report of the British Association, and Researches on Hydrodynamics in the Philosophical Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1836.)

The form of the channels was rectangular.
The breadth of the channels varied from 12 inches to 12 feet.
Column A gives the depth of the channel in inches reckoned from the top of the wave.
Column B gives the height of the wave above the surface of the fluid in repose.
Column C is the velocity of the wave in feet per second, from observation.
Column D is the velocity of the wave calculated by formula B.
Column E is the difference between columns D and C.

A.	B.	C.	D.	E.	A.	B.	C.	D.	E.
1·0			1·63		6·9	0·7	4·29	4·30	+·01
1·05	0·05	1·64	1·67	+·03	7·0			4·33	
1·30	0·15	1·84	1·86	+·02	7·33	0·29	4·39	4·43	+·04
1·62	0·32	2·06	2·08	+·02	7·44	0·40	4·44	4·46	+·02
2·0			2·31		7·82	0·78	4·53	4·57	+·04
2·19	0·29	2·30	2·42	+·12	8·0	0·78	4·53	4·63	+·10
3·0			2·83		9·0			4·91	
3·10	0·16	2·87	2·88	+·01	10·0			5·18	
3·23	0·15	2·99	2·94	−·05	11·0			5·43	
3·84	0·92	3·24	3·21	−·03	15·0			6·34	
3·9	0·96	3·33	3·23	−·10	19·0			7·14	
3·97	0·81	3·26	3·26	·00	20·0			7·32	
4·0	0·19	3·33	3·27	−·06	21·0			7·50	
4·08	0·13	3·24	3·30	+·06	26 0			8·35	
4·20	0·13	3·33	3·35	+·02	27·0			8·51	
4·31	0·24	3·40	3·40	·00	28·0			8·66	
4·49	0·42	3·46	3·47	+·01	29·0			8·82	
4·61	0·74	3·52	3·51	−·01	30·0			8·97	
4·75	0·8	3·52	3·56	+·04	35·0			9 68	
5·0			3·66		42·0	3·0	10·59	10·61	+·02
5·20	0·10	3·73	3·73	·00	45·0			10·98	
5·25	0·15	3·72	3·75	+·03	50·0			11·58	
5·61	0·57	4·05	3·88	−·17	55·0			12·14	
5·82	0·72	3·90	3·95	+·05	60·0			12·68	
6·0			4·01		65·0			13·20	
6·47	0·27	4·14	4·16	+·02	70·0			13·70	
6·74	0·54	4·32	4·25	−·07	75·0	9·0	14·23	14·18	−·05
									+·66
									−·54
									+·12
								Mean..	+·004

John Scott Russell, Report on Waves, 1844.

Проблема

Волновое уравнение:

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Грубо говоря, $a = \frac{F}{m}$:

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Грубо говоря, $a = \frac{F}{m}$: в левой части — ускорение, в правой — действующая сила.

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Грубо говоря, $a = \frac{F}{m}$: в левой части — ускорение, в правой — действующая сила.
Его решения:

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct);$$

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Грубо говоря, $a = \frac{F}{m}$: в левой части — ускорение, в правой — действующая сила.
Его решения:

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct);$$

$$\partial_x^2 - c^2 \partial_t^2 = (\partial_x - c\partial_t)(\partial_x + c\partial_t)$$

Проблема

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Грубо говоря, $a = \frac{F}{m}$: в левой части — ускорение, в правой — действующая сила.
Его решения:

$$u(t,x) = f(x - ct) + g(x + ct);$$

$$\partial_x^2 - c^2\partial_t^2 = (\partial_x - c\partial_t)(\partial_x + c\partial_t)$$

Если сильно от этого отличаемся (другие производные, нелинейность,...) — разве волна выживет?

Уравнение Кортевега–де Фриза (KdV)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{2}{3}\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)$$

Уравнение Кортевега–де Фриза (KdV)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{2}{3}\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)$$

Замена $t' = \alpha x$, $x' = \beta x$, $u' = \gamma u$ позволяет выбирать константы.

Уравнение Кортевега–де Фриза (KdV)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{2}{3}\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)$$

Замена $t' = \alpha x$, $x' = \beta x$, $u' = \gamma u$ позволяет выбирать константы.

$$u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} = 0$$

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа;

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Решим его:

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено!

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$u_t + uu_x = 0.$$

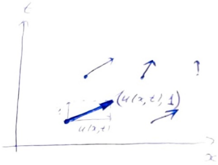
Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:

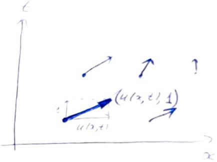


Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\partial_{(u,1)} u = u_t + u u_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:



Тогда

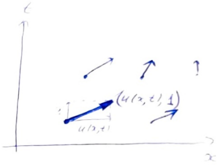
- производная u вдоль этого поля равна нулю

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\partial_{(u,1)} u = u_t + uu_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:



Тогда

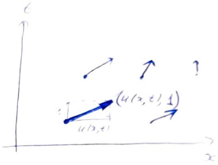
- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\partial_{(u,1)} u = u_t + u u_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:



Тогда

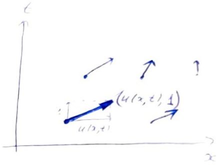
- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно
- траектории — прямые!

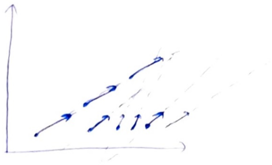
Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\color{red}{\partial_{(u,1)} u} = u_t + u u_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:





Тогда

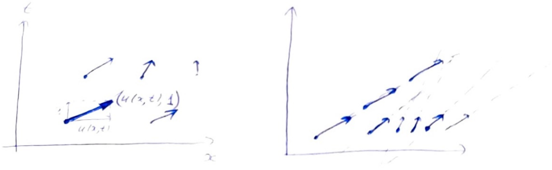
- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно
- траектории — прямые!

Компоненты-1

Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\partial_{(u,1)} u = u_t + uu_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t),1)$:



Тогда

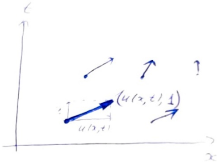
- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно
- траектории — прямые!
- решение — профиль скорости на шоссе, где машины скорость не меняют

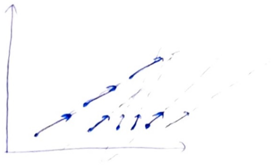
Компоненты-1

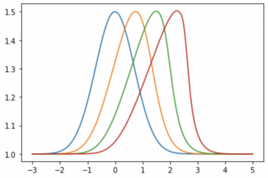
Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\color{red}{\partial_{(u,1)} u} = u_t + u u_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t), 1)$:







Тогда

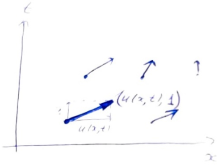
- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно
- траектории — прямые!
- решение — профиль скорости на шоссе, где машины скорость не меняют

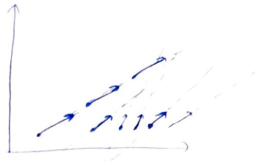
Компоненты-1

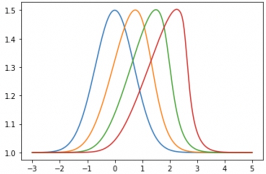
Уравнение Римана–Хопфа; оно же — уравнение Бюргерса без вязкости:

$$\partial_{(u,1)} u = u_t + u u_x = 0.$$

Решим его: предположим, что оно уже решено! Построим векторное поле $(u(x,t), 1)$:







Тогда

- производная u вдоль этого поля равна нулю
- решение $u(t,x)$ на его траекториях постоянно
- траектории — прямые!
- решение — профиль скорости на шоссе, где машины скорость не меняют + «барашки» у прибоя

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$:

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$
- Волна u_k превращается в решение

$$e^{\lambda(k)t} u_k =$$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$
- Волна u_k превращается в решение

$$e^{\lambda(k)t} u_k = e^{-ik^3 t} e^{ikx} =$$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$
- Волна u_k превращается в решение

$$e^{\lambda(k)t} u_k = e^{-ik^3 t} e^{ikx} = e^{ik(x-k^2 t)}$$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

$$u_t = u_{xxx}$$

- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$
- Волна u_k превращается в решение

$$e^{\lambda(k)t} u_k = e^{-ik^3 t} e^{ikx} = e^{ik(x-k^2 t)} = u_k(x - k^2 t),$$

Компоненты-2: разбегающиеся волновые пакеты

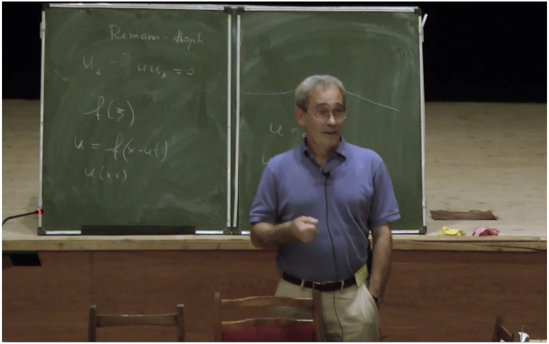
$$u_t = u_{xxx}$$

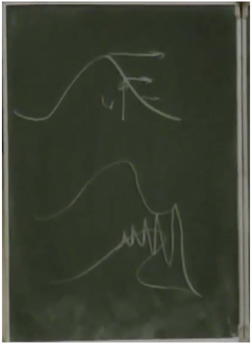
- Дифференциальное уравнение $v_t = Av$: ищем собственные вектора $Av_j = \lambda_j v_j$ и раскладываем по ним: $\sum_j c_j e^{\lambda_j t} v_j$.
- У коммутирующих операторов можно искать общие собственные вектора;
- Обобщённые собственные векторы у группы сдвигов — Фурье-гармоники $u_k(x) := e^{ikx}$
- $\lambda(k) = (ik)^3$
- Волна u_k превращается в решение

$$e^{\lambda(k)t} u_k = e^{-ik^3 t} e^{ikx} = e^{ik(x-k^2 t)} = u_k(x - k^2 t),$$

т. е. она движется со скоростью k^2.

+ архив





Источник: И. М. Кричевер, лекция, ЛШСМ-2010

Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t = cu_x.$$

Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t = cu_x.$$

Ответ: решение с начальным профилем

$$u(0,x) = \frac{2k^2}{\mathrm{ch}^2(kx)}$$

движется со скоростью $c = k^2$;

Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t = cu_x.$$

Ответ: решение с начальным профилем

$$u(0, x) = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(kx)}$$

движется со скоростью $c = k^2$; тут

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

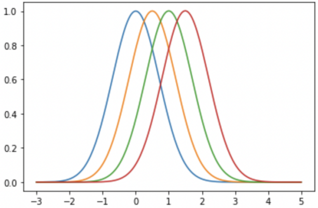
$$u_t = cu_x.$$

Ответ: решение с начальным профилем

$$u(0,x) = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(kx)}$$

движется со скоростью $c = k^2$; тут

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



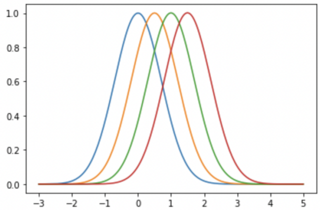
Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t = cu_x.$$

Ответ: решение с начальным профилем

$$u(0,x) = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(kx)}$$



движется со скоростью $c = k^2$; тут

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Доказательство: подставим и проверим.

Солитон

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

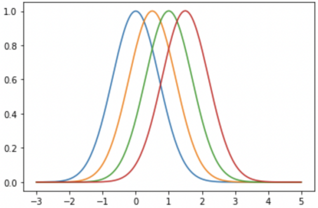
$$u_t = cu_x.$$

Ответ: решение с начальным профилем

$$u(0,x) = \frac{2k^2}{\mathrm{ch}^2(kx)}$$

движется со скоростью $c = k^2$; тут

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Доказательство: подставим и проверим.
А откуда оно берётся?

Солитон: ОДУ

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t + cu_x = 0;$$

Солитон: ОДУ

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t + cu_x = 0; \quad u_t = \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

Солитон: ОДУ

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t + cu_x = 0; \quad u_t = \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

Уравнение на начальный профиль $f(x) = u(0, x)$:

$$cf_x + \frac{3}{2}ff' - \frac{1}{4}f''' = 0.$$

Солитон: ОДУ

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t + cu_x = 0; \quad u_t = \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

Уравнение на начальный профиль $f(x) = u(0, x)$:

$$cf_x + \frac{3}{2}ff' - \frac{1}{4}f''' = 0.$$

$$cf + \frac{3}{4}f^2 - \frac{1}{4}f'' = A.$$

Солитон: ОДУ

Решение, движущееся с постоянной скоростью c: нужно, чтобы

$$u_t + cu_x = 0; \quad u_t = \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

Уравнение на начальный профиль $f(x) = u(0, x)$:

$$cf_x + \frac{3}{2}ff' - \frac{1}{4}f''' = 0.$$

$$cf + \frac{3}{4}f^2 - \frac{1}{4}f'' = A.$$

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A.$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A =$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

Это уравнения движения шарика в поле сил с потенциалом $U(f)$,

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

Это уравнения движения шарика в поле сил с потенциалом $U(f)$, где x играет роль времени, а f — координаты!

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = \, - U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

Это уравнения движения шарика в поле сил с потенциалом $U(f)$, где x играет роль времени, а f — координаты!

$$E := \frac{1}{2}f'^2 + U(f) = \mathrm{const} \text{ вдоль решения}$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

Это уравнения движения шарика в поле сил с потенциалом $U(f)$, где x играет роль времени, а f — координаты!

$$E := \frac{1}{2}f'^2 + U(f) = \mathrm{const} \text{ вдоль решения}$$

$$f' = \frac{df}{dx} = \pm\sqrt{2(E - U(f))}$$

Солитон: уравнение Ньютона

$$f'' = 4cf + 3f^2 - 4A = -U'(f),$$

$$U(f) = -f^3 - 2cf^2 + 4Af.$$

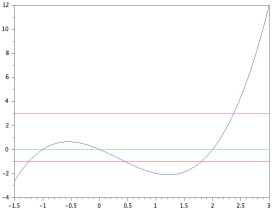
Это уравнения движения шарика в поле сил с потенциалом $U(f)$, где x играет роль времени, а f — координаты!

$$E := \frac{1}{2}f'^2 + U(f) = \mathrm{const} \ \text{вдоль решения}$$

$$f' = \frac{df}{dx} = \pm\sqrt{2(E - U(f))}$$

$$\int \frac{df}{\sqrt{2(E - U(f))}} = \pm x + C,$$

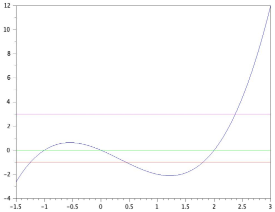
Солитон: ищем решения



Если выбрать энергию E:

- Слишком высокой — решение за конечное время улетит в бесконечность;

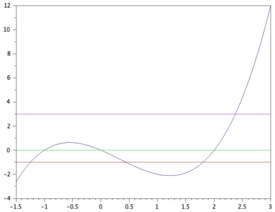
Солитон: ищем решения



Если выбрать энергию E:

- Слишком высокой — решение за конечное время улетит в бесконечность;
- Слишком низкой — будет колебаться периодично;

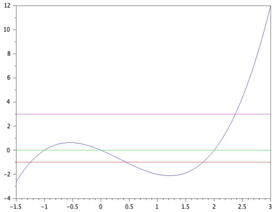
Солитон: ищем решения



Если выбрать энергию E:

- Слишком высокой — решение за конечное время улетит в бесконечность;
- Слишком низкой — будет колебаться периодично;
- Аккурат через локальный максимум U — решение будет стремиться к его координате.

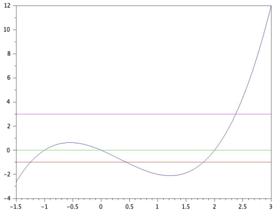
Солитон: ищем решения



Если выбрать энергию E:

- Слишком высокой — решение за конечное время улетит в бесконечность;
- Слишком низкой — будет колебаться периодично;
- Аккурат через локальный максимум U — решение будет стремиться к его координате.
- $U - E = -f^3 - 2cf^2 + 4Af - E$

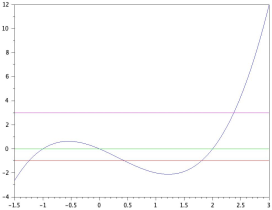
Солитон: ищем решения



Если выбрать энергию E:

- Слишком высокой — решение за конечное время улетит в бесконечность;
- Слишком низкой — будет колебаться периодично;
- Аккурат через локальный максимум U — решение будет стремиться к его координате.
- $U - E = -f^3 - 2cf^2 + 4Af - E \Rightarrow$ берём $E = A = 0$.

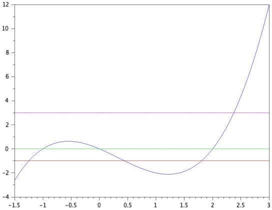
Солитон: алгебраическая геометрия



Интегрирование $\int \frac{1}{\sqrt{P_3(x)}}\,dx$:

- рассмотрим риманову поверхность $\{y^2 = P_3(x)\}$

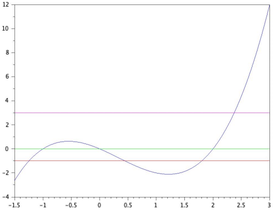
Солитон: алгебраическая геометрия



Интегрирование $\int \frac{1}{\sqrt{P_3(x)}}\,dx$:

- рассмотрим риманову поверхность $\{y^2 = P_3(x)\}$
- обычно это — эллиптическая кривая (тор!) $\mathbb{C}/\Gamma$ с хорошими координатами $dz = \frac{dx}{y}$

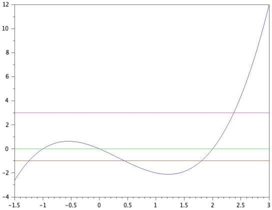
Солитон: алгебраическая геометрия



Интегрирование $\int \frac{1}{\sqrt{P_3(x)}}\,dx$:

- рассмотрим римманову поверхность $\{y^2 = P_3(x)\}$
- обычно это — эллиптическая кривая (тор!) $\mathbb{C}/\Gamma$ с хорошими координатами $dz = \frac{dx}{y}$
- наша первообразная — это и есть координата z.

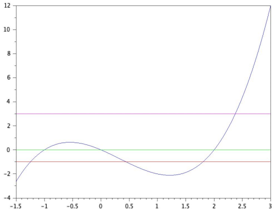
Солитон: алгебраическая геометрия



Интегрирование $\int \frac{1}{\sqrt{P_3(x)}}\, dx$:

- рассмотрим риманову поверхность $\{y^2 = P_3(x)\}$
- обычно это — эллиптическая кривая (тор!) $\mathbb{C}/\Gamma$ с хорошими координатами $dz = \frac{dx}{y}$
- наша первообразная — это и есть координата z.
- $\wp(z)$-функция Вейерштрасса: переход от z к x

Солитон: алгебраическая геометрия



Интегрирование $\int \frac{1}{\sqrt{P_3(x)}}\,dx$:

- рассмотрим риманову поверхность $\{y^2 = P_3(x)\}$
- обычно это — эллиптическая кривая (тор!) $\mathbb{C}/\Gamma$ с хорошими координатами $dz = \frac{dx}{y}$
- наша первообразная — это и есть координата z.
- $\wp(z)$-функция Вейерштрасса: переход от z к x
- если у поверхности есть двойная точка, то поверхность рациональная: координаты (x, y) выражаются рационально через общий параметр z.

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?

Двухсолитонные решения

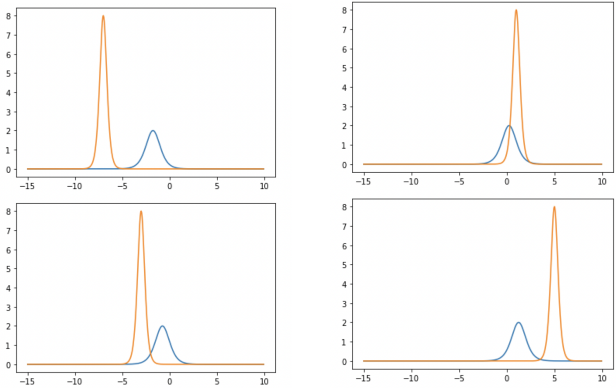
А есть ли решения, в которых есть два солитона?

Если бы уравнение KdV было линейным:

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?

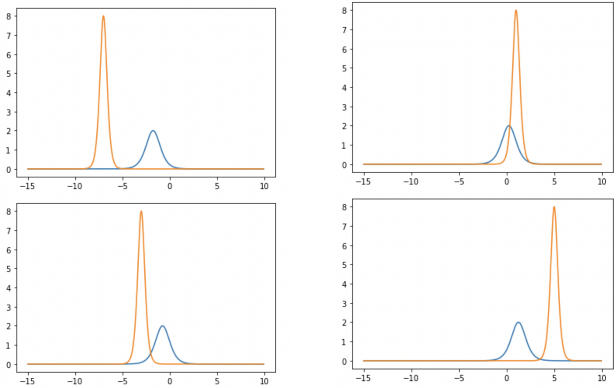
Если бы уравнение KdV было линейным:



Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?

Если бы уравнение KdV было линейным:



Но оно нелинейное!

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?
И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?
Ответ: есть,

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?

И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?

Ответ: есть, например,

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?
И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?
Ответ: есть, например,

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?
И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?
Ответ: есть, например,

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

А как с этим работать?

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?
И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?
Ответ: есть, например,

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

А как с этим работать? И откуда такая формула вообще появилась?

Двухсолитонные решения

А есть ли решения, в которых есть два солитона?
И — раз они движутся с разными скоростями, то что будет, когда они столкнутся?
Ответ: есть, например,

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

А как с этим работать? И откуда такая формула вообще появилась?

Spoiler: функция u выше представляется в $u = -2\partial_x^2 \ln \tau$ для некоторой функции $\tau(x,t)$.

Двухсолитонные решения

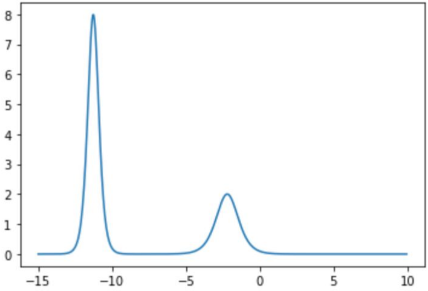
$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

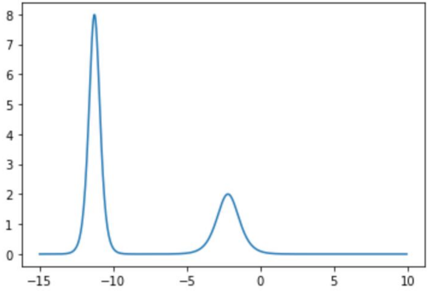
Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

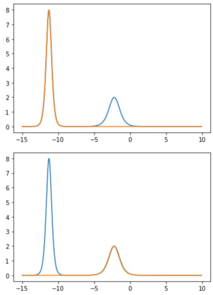


Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

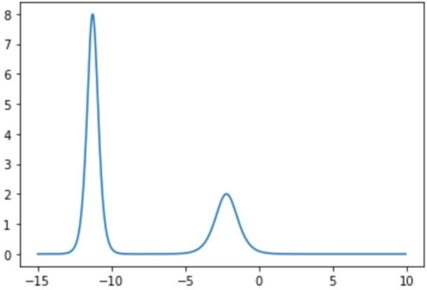




Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

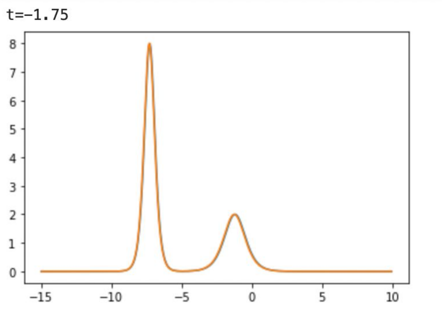
Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019



Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \qquad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

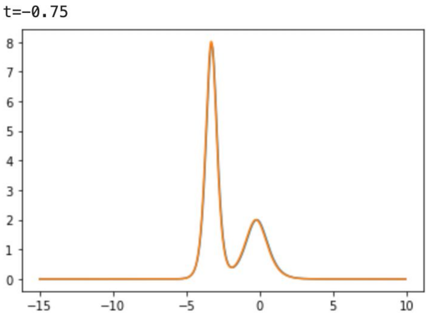


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

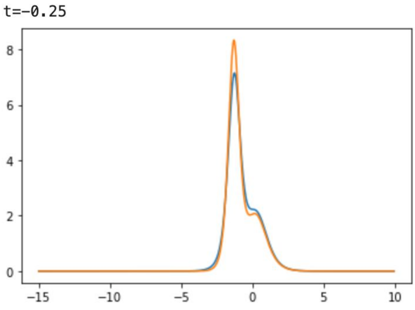


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

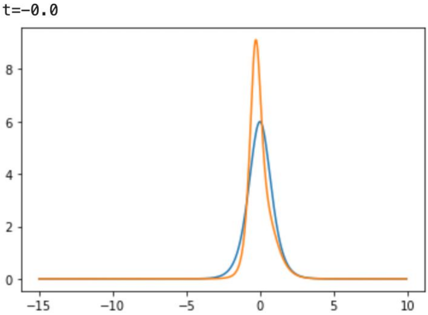


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

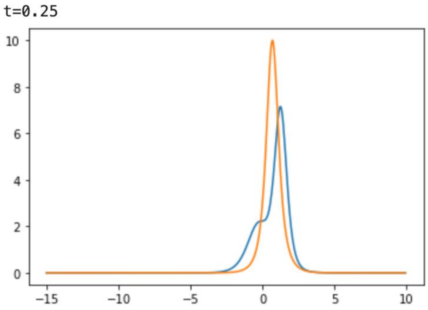


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

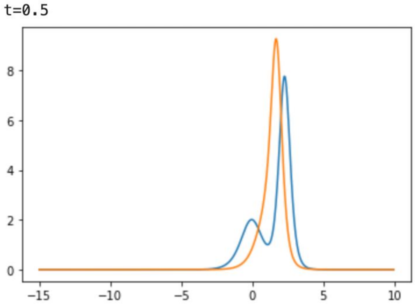


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

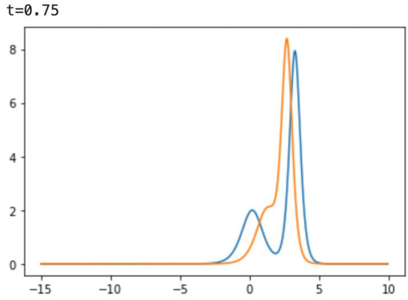


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \quad (1.3.1)$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

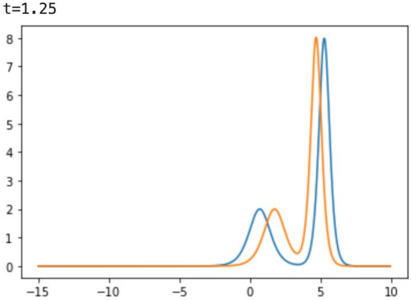


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t)=\frac{24\left(e^{(2x-2t)}+6e^{(6x-18t)}+4e^{(4x-16t)}+4e^{(8x-20t)}+e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1+3e^{(2x-2t)}+e^{(6x-18t)}+3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019

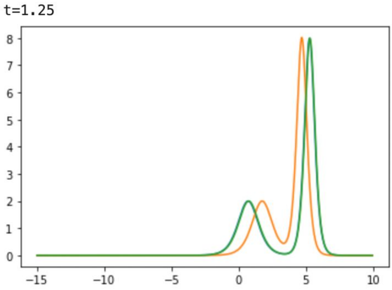


Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов

Двухсолитонные решения

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

Источник: записки курса Н. А. Рожковской в ЛШСМ-2019



Синяя линия — истинное двухсолитонное решение, оранжевая — сумма одиночных солитонов, зелёная — сумма сдвинутых солитонов

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

$\partial_t I_1$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t \, dx$$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx})_x\,dx$$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx})_x dx = 0.$$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx})_x dx = 0.$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx$$

$\partial_t I_2$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx})_x dx = 0.$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx$$

$$\partial_t I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2u \cdot u_t dx$$

Первые интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx$$

$$\partial_t I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx})_x dx = 0.$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx$$

$$\partial_t I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2u \cdot u_t dx = \cdots = 0$$

Пары Лакса

Пусть задана функция u.

Пары Лакса

Пусть задана функция u. В каждый момент времени t рассмотрим операторы

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Пары Лакса

Пусть задана функция u. В каждый момент времени t рассмотрим операторы

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

$L(t)$ — оператор Шрёдингера с потенциалом $u(t, .)$;

Пары Лакса

Пусть задана функция u. В каждый момент времени t рассмотрим операторы

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

$L(t)$ — оператор Шрёдингера с потенциалом $u(t, .)$; его собственные функции ψ — стационарные состояния соответствующей квантовой системы

$$(-\partial^2 + u)\psi = \lambda\psi$$

Пары Лакса

Пусть задана функция u. В каждый момент времени t рассмотрим операторы

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

$L(t)$ — оператор Шрёдингера с потенциалом $u(t,.)$; его собственные функции ψ — стационарные состояния соответствующей квантовой системы

$$(-\partial^2 + u)\psi = \lambda\psi$$

Если посчитать коммутатор $[L, A] = LA - AL$...

Пары Лакса

Пусть задана функция u. В каждый момент времени t рассмотрим операторы

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

$L(t)$ — оператор Шрёдингера с потенциалом $u(t,.)$; его собственные функции ψ — стационарные состояния соответствующей квантовой системы

$$(-\partial^2 + u)\psi = \lambda\psi$$

Если посчитать коммутатор $[L, A] = LA - AL$... то получится оператор умножения на функцию!

$$[L(t), A(t)] = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow u_t = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \Leftrightarrow$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow u_t = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \Leftrightarrow$

$$\dot{L}(t) = [A(t), L(t)]$$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow u_t = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \Leftrightarrow$

$$\dot{L}(t) = [A(t), L(t)]$$

Это равносильно тому, что

$$[\partial_t - A(t), L(t)] = 0$$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow u_t = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \Leftrightarrow$

$$\dot{L}(t) = [A(t), L(t)]$$

Это равносильно тому, что

$$[\partial_t - A(t), L(t)] = 0$$

То есть операторы $L(t)$ в разные моменты времени сопряжены друг другу потоком уравнения $\partial_t \psi = -A(t)\psi$

Пары Лакса-2

$$L(t) = -\partial^2 + u, \quad A(t) = \partial^3 - \frac{3}{4}(u\partial + \partial u).$$

Коммутатор $[L, A] = LA - AL$ — это оператор умножения на функцию: $\frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx}$.
Поэтому u — решение KdV $\Leftrightarrow u_t = \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \Leftrightarrow$

$$\dot{L}(t) = [A(t), L(t)]$$

Это равносильно тому, что

$$[\partial_t - A(t), L(t)] = 0$$

То есть операторы $L(t)$ в разные моменты времени сопряжены друг другу потоком уравнения $\partial_t\psi = -A(t)\psi \Rightarrow$ много что сохраняется!

Псевдодифференциальные операторы

Определение

Псевдодифференциальный оператор порядка не выше n — формальная сумма вида

$$A = f_n(x)\partial^n + \dots + f_1(x)\partial + f_0 + f_{-1}(x)\partial^{-1} + f_{-2}(x)\partial^{-2} + \dots .$$

$$A_- = \sum_{j=-\infty}^{-1} f_j(x)\partial^j .$$

Псевдодифференциальные операторы

Определение

Псевдодифференциальный оператор порядка не выше n — формальная сумма вида

$$A = f_n(x)\partial^n + \cdots + f_1(x)\partial + f_0 + f_{-1}(x)\partial^{-1} + f_{-2}(x)\partial^{-2} + \ldots .$$

Определение

Обозначим через $D(A)$ порядок A, и пусть

$$A_+ := \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\partial^j,$$

Псевдодифференциальные операторы

Определение

Псевдодифференциальный оператор порядка не выше n — формальная сумма вида

$$A = f_n(x)\partial^n + \cdots + f_1(x)\partial + f_0 + f_{-1}(x)\partial^{-1} + f_{-2}(x)\partial^{-2} + \dots.$$

Определение

Обозначим через $D(A)$ порядок A, и пусть

$$A_+ := \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\partial^j, \quad A_- = \sum_{j=-\infty}^{-1} f_j(x)\partial^j.$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать,

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} =$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

$$\begin{aligned}\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} = \\ = f\partial^{-1} - f_x \partial^{-2}\end{aligned}$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, "интегрируя по частям":

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} = \\ = f\partial^{-1} - f_x \partial^{-2} + f_{xx} \partial^{-3}$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, ‘‘интегрируя по частям’’:

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} =$$
$$= f\partial^{-1} - f_x\partial^{-2} + f_{xx}\partial^{-3} - f_{xxx}\partial^{-4}$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} =$$
$$= f\partial^{-1} - f_x\partial^{-2} + f_{xx}\partial^{-3} - f_{xxx}\partial^{-4} \pm \dots .$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} =$$
$$= f\partial^{-1} - f_x\partial^{-2} + f_{xx}\partial^{-3} - f_{xxx}\partial^{-4} \pm \dots .$$

Последовательно выражая коэффициенты, можно найти корень из $-L$,

$$B^2 = -L = (\partial^2 - u),$$

Псевдодифференциальные операторы-2

Псевдодифференциальные операторы можно умножать, “интегрируя по частям”:

$$\partial^{-1} \circ f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f_x \partial^{-1} = \\ = f\partial^{-1} - f_x\partial^{-2} + f_{xx}\partial^{-3} - f_{xxx}\partial^{-4} \pm \ldots .$$

Последовательно выражая коэффициенты, можно найти корень из $-L$,

$$B^2 = -L = (\partial^2 - u),$$

$$B = \partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \ldots$$

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$

$$= (\partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u_x + \dots)$$

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$

$$= (\partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u_x + \dots)$$

То есть в паре Лакса

$$A = ((-L)^{3/2})_+$$

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$

$$= (\partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u_x + \dots)$$

То есть в паре Лакса

$$A = ((-L)^{3/2})_+$$

$$[A, L] = [(B^3)_+, -B^2] = \underbrace{[B^3, -B^2]}_{=0} - [\underbrace{(B^3)_-}_{D\leq -1}, \underbrace{-B^2}_{D=2}],$$

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$
$$= (\partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u_x + \dots)$$

То есть в паре Лакса

$$A = ((-L)^{3/2})_+$$

$$[A, L] = [(B^3)_+, -B^2] = \underbrace{[B^3, -B^2]}_{=0} - [\underbrace{(B^3)_-}_{D \le -1}, \underbrace{-B^2}_{D=2}],$$

поэтому степень $D([A, L])$ не превосходит $(-1) + 2 - 1 = 0$.

Псевдодифференциальные операторы-3

Рассмотрим

$$(-L)^{3/2} = B^3 = -LB = (\partial^2 - u)(\partial - \frac{u}{2}\partial^{-1} + \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \dots) =$$
$$= (\partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u_x + \dots)$$

То есть в паре Лакса

$$A = ((-L)^{3/2})_+$$

$$[A, L] = [(B^3)_+, -B^2] = \underbrace{[B^3, -B^2]}_{=0} - [\underbrace{(B^3)_-}_{D \le -1}, \underbrace{-B^2}_{D=2}],$$

поэтому степень $D([A, L])$ не превосходит $(-1) + 2 - 1 = 0$.
$[A, L]$ — (обычный) дифференциальный оператор степени не больше 0 $\Rightarrow$ это оператор умножения на функцию.

Иерархия KdV

Для любого n и любой функции $u(x)$ можно рассмотреть

$$L = -\partial^2 + u, \quad B := (-L)^{1/2} = \partial + \dots,$$

Иерархия KdV

Для любого n и любой функции $u(x)$ можно рассмотреть

$$L = -\partial^2 + u, \quad B := (-L)^{1/2} = \partial + \dots,$$

$$A_{2n+1} := (B^{2n+1})_+;$$

тогда коммутатор

$$[A_{2n+1}, L]$$

Иерархия KdV

Для любого n и любой функции $u(x)$ можно рассмотреть

$$L = -\partial^2 + u, \quad B := (-L)^{1/2} = \partial + \dots,$$

$$A_{2n+1} := (B^{2n+1})_+;$$

тогда коммутатор

$$[A_{2n+1}, L] = -[(B^{2n+1})_-, -B^2]$$

будет дифференциальным оператором степени не выше $(-1) + 2 - 1 = 0$,

Иерархия KdV

Для любого n и любой функции $u(x)$ можно рассмотреть

$$L = -\partial^2 + u, \quad B := (-L)^{1/2} = \partial + \dots,$$

$$A_{2n+1} := (B^{2n+1})_+;$$

тогда коммутатор

$$[A_{2n+1}, L] = -[(B^{2n+1})_-, -B^2]$$

будет дифференциальным оператором степени не выше $(-1) + 2 - 1 = 0$, то есть оператором умножения на функцию $\mathcal{D}_{2n+1}(u)$.

Иерархия KdV

Получаем счётное число потоков «по разным направлениям» $t_1, t_3, t_5, \ldots$:

$$\partial_{t_{2n+1}} u = \mathcal{D}_{2n+1}(u).$$

Иерархия KdV

Получаем счётное число потоков «по разным направлениям» $t_1, t_3, t_5, \ldots$:

$$\partial_{t_{2n+1}} u = \mathcal{D}_{2n+1}(u).$$

Они коммутируют!

Иерархия KdV

Получаем счётное число потоков «по разным направлениям» $t_1, t_3, t_5, \ldots$:

$$\partial_{t_{2n+1}} u = \mathcal{D}_{2n+1}(u).$$

Они коммутируют!

Доказательство: не сложная, но нетривиальная выкладка.

Коммутирующие операторы

Пусть
$$\widetilde{A} := \partial_t - A, \quad L = -\partial_x^2 + u$$
операторы на функциях от двух переменных (x, t).

Коммутирующие операторы

Пусть

$$\widetilde{A} := \partial_t - A, \quad L = -\partial_x^2 + u$$

операторы на функциях от двух переменных (x, t). Они коммутируют тогда и только тогда, когда у них есть общий (собственный вектор $\psi(x, t)$:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \widetilde{A}\psi = \mu\psi.$$

Коммутирующие операторы

Пусть

$$\widetilde{A} := \partial_t - A, \quad L = -\partial_x^2 + u$$

операторы на функциях от двух переменных (x, t). Они коммутируют тогда и только тогда, когда у них есть общий (собственный вектор $\psi(x, t)$:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \widetilde{A}\psi = \mu\psi.$$

Одного (почти всюду ненулевого) общего собственного вектора достаточно:

Коммутирующие операторы

Пусть

$$\widetilde{A} := \partial_t - A, \quad L = -\partial_x^2 + u$$

операторы на функциях от двух переменных (x, t). Они коммутируют тогда и только тогда, когда у них есть общий (собственный вектор $\psi(x, t)$:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \widetilde{A}\psi = \mu\psi.$$

Одного (почти всюду ненулевого) общего собственного вектора достаточно: коммутатор $[\widetilde{A}, L]$ — умножение на функцию

$$u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx};$$

если она ненулевая, то такого ψ быть не может.

Коммутирующие операторы

Пусть

$$\widetilde{A} := \partial_t - A, \quad L = -\partial_x^2 + u$$

операторы на функциях от двух переменных (x, t). Они коммутируют тогда и только тогда, когда у них есть общий (собственный вектор $\psi(x, t)$:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \widetilde{A}\psi = \mu\psi.$$

Одного (почти всюду ненулевого) общего собственного вектора достаточно: коммутатор $[\widetilde{A}, L]$ — умножение на функцию

$$u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx};$$

если она ненулевая, то такого ψ быть не может.
Можно искать решения u, начиная с ψ!

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n
- пары противоположных $(k_1, -k_1), \ldots, (k_n, -k_n)$

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n
- пары противоположных $(k_1, -k_1), \ldots, (k_n, -k_n)$
- многочлен степени n от переменной $k \in \mathbb{C}$:

$$P_0(k) = k^n + b_1 k^{n-1} + \cdots + b_{n-1} k + b_n.$$

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n
- пары противоположных $(k_1, -k_1), \dots, (k_n, -k_n)$
- многочлен степени n от переменной $k \in \mathbb{C}$:

$$P_0(k) = k^n + b_1 k^{n-1} + \dots + b_{n-1} k + b_n.$$

Ищем

$$\psi(x, t; k) = e^{kx + k^3 t} \cdot \frac{P(x, t; k)}{P_0(k)},$$

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n
- пары противоположных $(k_1, -k_1), \dots, (k_n, -k_n)$
- многочлен степени n от переменной $k \in \mathbb{C}$:

$$P_0(k) = k^n + b_1 k^{n-1} + \dots + b_{n-1} k + b_n.$$

Ищем

$$\psi(x, t; k) = e^{kx + k^3 t} \cdot \frac{P(x, t; k)}{P_0(k)},$$

где в числителе стоит многочлен от k

$$P(x, t; k) = k^n + a_1(x, t) k^{n-1} + \dots + a_n(x, t),$$

n-солитонное решение

Зафиксируем:

- число n
- пары противоположных $(k_1, -k_1), \dots, (k_n, -k_n)$
- многочлен степени n от переменной $k \in \mathbb{C}$:

$$P_0(k) = k^n + b_1 k^{n-1} + \cdots + b_{n-1} k + b_n.$$

Ищем

$$\psi(x, t; k) = e^{kx + k^3 t} \cdot \frac{P(x, t; k)}{P_0(k)},$$

где в числителе стоит многочлен от k

$$P(x, t; k) = k^n + a_1(x, t) k^{n-1} + \cdots + a_n(x, t),$$

а неизвестные $a_i(x, t)$ находятся из условий

$$\psi(x, t; k_j) = \psi(x, t; -k_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

n-солитонное решение: система

На $a_j(x,t)$ получается система из n линейных уравнений:

n-солитонное решение: система

На $a_j(x,t)$ получается система из n линейных уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{e^{k_1x+k_1^3t}}{P_0(k_1)}k_1^{n-j}-\frac{e^{-k_1x-k_1^3t}}{P_0(-k_1)}(-k_1)^{n-j}\right)a_j(x,t)= \\ \qquad\qquad =-\left(\dfrac{e^{k_1x+k_1^3t}}{P_0(k_1)}k_1^{n}-\dfrac{e^{-k_1x-k_1^3t}}{P_0(-k_1)}(-k_1)^{n}\right) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{e^{k_nx+k_n^3t}}{P_0(k_n)}k_n^{n-j}-\frac{e^{-k_nx-k_n^3t}}{P_0(-k_n)}(-k_n)^{n-j}\right)a_j(x,t)= \\ \qquad\qquad =-\left(\dfrac{e^{k_nx+k_n^3t}}{P_0(k_n)}k_n^{n}-\dfrac{e^{-k_nx-k_n^3t}}{P_0(-k_n)}(-k_n)^{n}\right). \end{cases}$$

n-солитонное решение: система

На $a_j(x,t)$ получается система из n линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{e^{k_1 x + k_1^3 t}}{P_0(k_1)} k_1^{n-j} - \dfrac{e^{-k_1 x - k_1^3 t}}{P_0(-k_1)} (-k_1)^{n-j} \right) a_j(x,t) = \\ \qquad\qquad = - \left(\dfrac{e^{k_1 x + k_1^3 t}}{P_0(k_1)} k_1^{n} - \dfrac{e^{-k_1 x - k_1^3 t}}{P_0(-k_1)} (-k_1)^{n} \right) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{e^{k_n x + k_n^3 t}}{P_0(k_n)} k_n^{n-j} - \dfrac{e^{-k_n x - k_n^3 t}}{P_0(-k_n)} (-k_n)^{n-j} \right) a_j(x,t) = \\ \qquad\qquad = - \left(\dfrac{e^{k_n x + k_n^3 t}}{P_0(k_n)} k_n^{n} - \dfrac{e^{-k_n x - k_n^3 t}}{P_0(-k_n)} (-k_n)^{n} \right). \end{cases}$$

$a_j(x,t)$ из неё определяются однозначно!

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$$

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$$

$$\psi_{xx} = \left(e^{kx+k^3 t} \cdot \frac{P(x,t;k)}{P_0(k)}\right)_{xx} =$$

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$$

$$\psi_{xx} = \left(e^{kx+k^3t} \cdot \frac{P(x,t;k)}{P_0(k)}\right)_{xx} =$$

$$= e^{kx+k^3t} \cdot \frac{k^2 P(x,t;k) + 2k \cdot \partial_x P(x,t;k) + \partial_x^2 P(x,t;k)}{P_0(k)}$$

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$$

$$\psi_{xx} = \left(e^{kx+k^3 t} \cdot \frac{P(x,t;k)}{P_0(k)}\right)_{xx} =$$

$$= e^{kx+k^3 t} \cdot \frac{k^2 P(x,t;k) + 2k \cdot \partial_x P(x,t;k) + \partial_x^2 P(x,t;k)}{P_0(k)}$$

$$\partial_x P(x,t;k) = 0 + \partial_x a_1(x,t) k^{n-1} + \dots + \partial_x a_n(x,t).$$

n-солитонное решение: построение u

Найдётся $u = u(x,t)$, такое, что $\psi(x,t;k)$ — собственный для $L = \partial_x^2 + u$:

$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi$$

$$\psi_{xx} = \left(e^{kx+k^3t} \cdot \frac{P(x,t;k)}{P_0(k)}\right)_{xx} =$$

$$= e^{kx+k^3t} \cdot \frac{k^2 P(x,t;k) + 2k \cdot \partial_x P(x,t;k) + \partial_x^2 P(x,t;k)}{P_0(k)}$$

$$\partial_x P(x,t;k) = 0 + \partial_x a_1(x,t) k^{n-1} + \cdots + \partial_x a_n(x,t).$$

Если взять $\lambda = k^2$, $u = -2\partial_x a_1(x,t)$, то в числителе

$$\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$$

не будет степеней k^{n+2}, k^{n+1}, k^n.

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$,

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе **нет** монома k^n.

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.

При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$:

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.
При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.

При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.

$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3 t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.

При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.

$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы $\Rightarrow$ это тождественный ноль.

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.
При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.
$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы $\Rightarrow$ это тождественный ноль.

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = k^2.$$

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.
При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.
$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы $\Rightarrow$ это тождественный ноль.

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = k^2.$$

Почти так же, но более муторно, проверяется, что $\widetilde{A}\psi = \mu\psi$

n-солитонное решение: окончание

Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.
При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.
$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы $\Rightarrow$ это тождественный ноль.

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = k^2.$$

Почти так же, но более муторно, проверяется, что $\widetilde{A}\psi = \mu\psi$
$\Rightarrow [L, \widetilde{A}] = 0$

n-солитонное решение: окончание

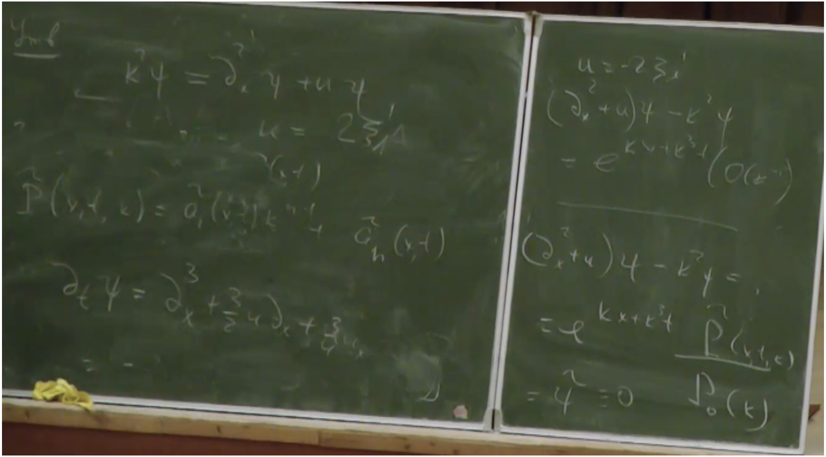
Разница $\psi_{xx} + u\psi - \lambda\psi$ имеет такой же вид $e^{kx+k^3t} \cdot \frac{\widetilde{P}(x,t;k)}{P_0(k)}$, но у многочлена $\widetilde{P}$ в числителе нет монома k^n.
При этом остаются совпадения значений в парах $(k_j, -k_j)$: дифференцируем только по x, а не по k.
$\Rightarrow$ коэффициенты находятся как решение такой же, только однородной системы $\Rightarrow$ это тождественный ноль.

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = k^2.$$

Почти так же, но более муторно, проверяется, что $\widetilde{A}\psi = \mu\psi$
$\Rightarrow [L, \widetilde{A}] = 0 \Rightarrow u$ — решение KdV.

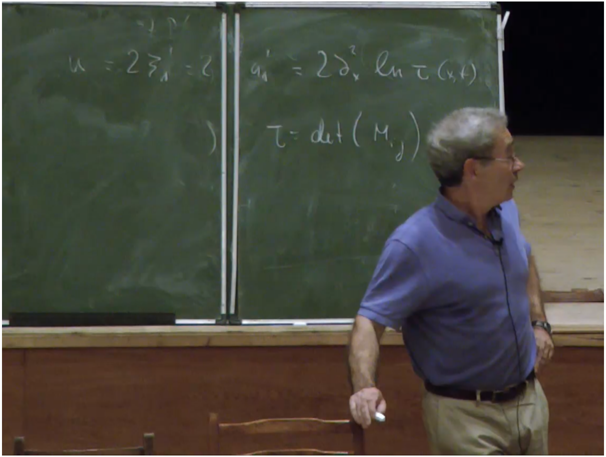
Из архива

Лекция И. М. Кричевера, ЛШСМ-2010:



Из архива

Лекция И. М. Кричевера, ЛШСМ-2010:



n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны.

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах.

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора.

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

Множество пар собственных значений (λ, μ) — кривая.

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

Множество пар собственных значений (λ, μ) — кривая. На операторы (M, L) есть полиномиальное соотношение

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

Множество пар собственных значений (λ, μ) — кривая. На операторы (M, L) есть полиномиальное соотношение $\Rightarrow$ эта кривая алгебраическая

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

Множество пар собственных значений (λ, μ) — кривая. На операторы (M, L) есть полиномиальное соотношение $\Rightarrow$ эта кривая алгебраическая (при $n = 1$ — эллиптическая).

n-солитонное решение на окружности

Поверим, что каждый из потоков иерархии KdV как-то двигает солитоны. Если их n, то есть линейная комбинация первых $n+1$ потоков, которая все n оставляет на своих местах. Значит,

$$[M, L] = 0, \quad M := c_1 A_1 + c_3 A_3 + \cdots + c_{2n+1} A_{2n+1}$$

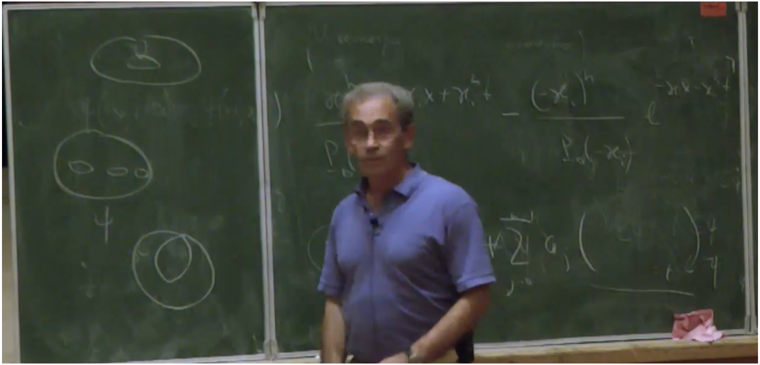
Это — два одномерных коммутирующих дифференциальных оператора. У них есть общие собственные функции ψ:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad M\psi = \mu\psi.$$

Множество пар собственных значений (λ, μ) — кривая. На операторы (M, L) есть полиномиальное соотношение $\Rightarrow$ эта кривая алгебраическая (при $n = 1$ — эллиптическая).

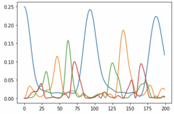
Из архива

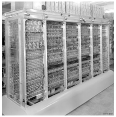
Лекция И. М. Кричевера, ЛШСМ-2010:



Осталось за кадром

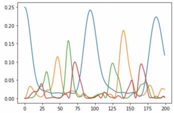
- Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу

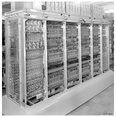




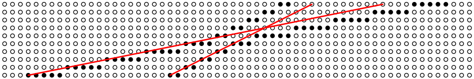
Осталось за кадром

- Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу



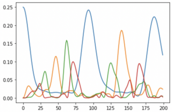


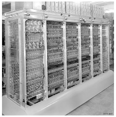
- Box-Ball Systems



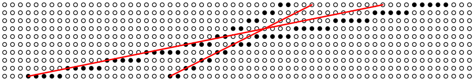
Осталось за кадром

- Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу





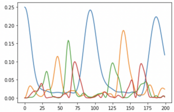
- Box-Ball Systems

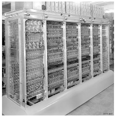


- Метод обратной задачи рассеяния

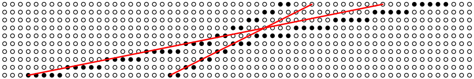
Осталось за кадром

- Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу





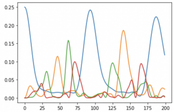
- Box-Ball Systems

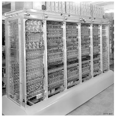


- Метод обратной задачи рассеяния
- Абелевы многообразия / якобиан спектральной кривой

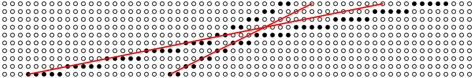
Осталось за кадром

- Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу





- Box-Ball Systems



- Метод обратной задачи рассеяния
- Абелевы многообразия / якобиан спектральной кривой
- … и ещё содержание большого курса

Спасибо за внимание!