Рациональные приближения функций и чисел

А.И. Аптекарев

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

XXII ЛШСМ, Дубна, 18-29 июля 2023

I. Функции

Степенные ряды, аналитические функции

- $\mathbb{C}$, многочлены, рациональные функции, полюсы

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathcal{P}_n,$$

$$c_n \neq 0, \quad \exists \{z_k\}_{k=1}^{n} : \quad P_n(z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

$$R_{n,m}(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \in \mathcal{R}_{n,m}(z), \quad Q_m \in \mathcal{P}_m.$$

$$\{\widetilde{z}_j\}_{j=1}^{m} : \; Q_m(\widetilde{z}_j) = 0 \implies R_{n,m} \underset{z \to \widetilde{z}_j}{\longrightarrow} \infty$$

- Ростки аналитических функций $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $\{c_k\}$:

$$0 < r_0 = \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} |c_k|^{1/k} \right)^{-1} \implies \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \rightrightarrows f(z), D_0 := \{|z| < r_0\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z^*)^k =: f(z), \qquad z^* = \infty \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} =: f(z).$$

Степенные ряды, аналитические функции

- $\mathbb{C}$, многочлены, рациональные функции, полюсы

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathcal{P}_n,$$

$$c_n \neq 0, \quad \exists \{z_k\}_{k=1}^{n} : \quad P_n(z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

$$R_{n,m}(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \in \mathcal{R}_{n,m}(z), \quad Q_m \in \mathcal{P}_m.$$

$$\{\widetilde{z}_j\}_{j=1}^{m} : \; Q_m(\widetilde{z}_j) = 0 \implies R_{n,m} \underset{z \to \widetilde{z}_j}{\longrightarrow} \infty$$

- Ростки аналитических функций $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $\{c_k\}$:

$$0 < r_0 = \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} |c_k|^{1/k} \right)^{-1} \implies \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \rightrightarrows f(z), D_0 := \{|z| < r_0\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z^*)^k =: f(z), \qquad z^* = \infty \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} =: f(z).$$

Рациональные аппроксимации ростка $f := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

- Аппроксимации Паде $\pi_{n,m} := \frac{P_n}{Q_m}$ (в т. $z = 0$):

$$f(z) - \pi_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1})$$

Таблица Паде:

$\pi_{0,0}$	$\pi_{1,0}$	$\pi_{2,0}$	$\pi_{3,0}$	.	.	.
$\pi_{0,1}$	$\pi_{1,1}$	$\pi_{2,1}$	$\pi_{3,1}$	.	.	.
$\pi_{0,2}$	$\pi_{1,2}$	$\pi_{2,2}$	$\pi_{3,2}$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

- Строка: $\{m = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \}$.

D_m – max круг, т.ч. внутри - m полюсов у f

1) Формула Адамара $r_m(\{c_k\}) = \cdots$

2) Мероморфное продолжение ростка f в D_m :

$$\pi_{n,m} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f, \quad z \in K \Subset D_m \setminus \{\text{полюсы } f\}$$

Рациональные аппроксимации ростка $f := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

- Аппроксимации Паде $\pi_{n,m} := \frac{P_n}{Q_m}$ (в т. $z = 0$):

$$f(z) - \pi_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1})$$

Таблица Паде:

$\pi_{0,0}$	$\pi_{1,0}$	$\pi_{2,0}$	$\pi_{3,0}$	.	.	.
$\pi_{0,1}$	$\pi_{1,1}$	$\pi_{2,1}$	$\pi_{3,1}$	.	.	.
$\pi_{0,2}$	$\pi_{1,2}$	$\pi_{2,2}$	$\pi_{3,2}$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

- Строка: $\{m = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \}$.

D_m – max круг, т.ч. внутри - m полюсов у f
1) Формула Адамара $r_m(\{c_k\}) = \cdots$
2) Мероморфное продолжение ростка f в D_m :

$$\pi_{n,m} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f, \quad z \in K \Subset D_m \setminus \{\text{полюсы } f\}$$

Диагональ таблицы Паде (в окр. т.∞)

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad \pi_n(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} : \quad f_n - \pi_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

- Алгоритм Евклида. Пусть [.] - полиномиальная часть $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} =: [\widetilde{f}(z)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

$$f(z) = \frac{1}{f^{-1}} = \frac{1}{[f^{-1}] + f_1} = \frac{1}{[f^{-1}] + \frac{1}{[f_1^{-1}]+f_2}} =: [p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots];$$

$$\pi_n(z) := [p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, , p^{(n-1)}] \qquad p^{(j)}(z) \in \mathcal{P}.$$

- Нормальный случай $p^{(j)} \in \mathcal{P}_1$

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} := [p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_1^{(n-1)}] = \cfrac{1}{z - a_0 - \cfrac{b_0^2}{z - a_1 - \dots - \cfrac{b_{n-2}^2}{z - a_{n-1}}}}$$

- Рекуррентные соотношения:

$$Q_{n+1}(z) = (z-a_n)Q_n(z) - b_{n-1}^2 Q_{n-1}(z), \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z - a_0.$$

Диагональ таблицы Паде (в окр. т.∞)

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\quad \pi_n(z)=\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}:\quad f_n-\pi_n(z)=O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

- Алгоритм Евклида. Пусть [.] - полиномиальная часть $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z)=\sum_{k=-p}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}=:[\widetilde{f}(z)]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$$

$$f(z)=\frac{1}{f^{-1}}=\frac{1}{[f^{-1}]+f_1}=\frac{1}{[f^{-1}]+\frac{1}{[f_1^{-1}]+f_2}}=:[p^{(0)},p^{(1)},p^{(2)},...];$$

$$\pi_n(z):=[p^{(0)},p^{(1)},p^{(2)},...,,p^{(n-1)}]\qquad p^{(j)}(z)\in\mathcal{P}.$$

- Нормальный случай $p^{(j)}\in\mathcal{P}_1$

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}:=[p_1^{(0)},p_1^{(1)},p_1^{(2)},...,p_1^{(n-1)}]=\cfrac{1}{z-a_0-\cfrac{b_0^2}{z-a_1-\cdots-\cfrac{b_{n-2}^2}{z-a_{n-1}}}}$$

- Рекуррентные соотношения:

$$Q_{n+1}(z)=(z-a_n)Q_n(z)-b_{n-1}^2Q_{n-1}(z),\quad Q_0=1,\quad Q_1=z-a_0.$$

Диагональ таблицы Паде (в окр. т.∞)

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\qquad \pi_n(z)=\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}:\qquad f_n-\pi_n(z)=O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

- Алгоритм Евклида. Пусть [.] - полиномиальная часть $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z)=\sum_{k=-p}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}=:[\widetilde{f}(z)]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$$

$$f(z)=\frac{1}{f^{-1}}=\frac{1}{[f^{-1}]+f_1}=\frac{1}{[f^{-1}]+\frac{1}{[f_1^{-1}]+f_2}}=:[p^{(0)},p^{(1)},p^{(2)},\dots];$$

$$\pi_n(z):=[p^{(0)},p^{(1)},p^{(2)},\dots,,p^{(n-1)}]\qquad p^{(j)}(z)\in\mathcal{P}.$$

- Нормальный случай $p^{(j)}\in\mathcal{P}_1$

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}:=[p_1^{(0)},p_1^{(1)},p_1^{(2)},\dots,p_1^{(n-1)}]=\cfrac{1}{z-a_0-\cfrac{b_0^2}{z-a_1-\dots-\cfrac{b_{n-2}^2}{z-a_{n-1}}}}$$

- Рекуррентные соотношения:

$$Q_{n+1}(z)=(z-a_n)Q_n(z)-b_{n-1}^2Q_{n-1}(z),\quad Q_0=1,\quad Q_1=z-a_0.$$

Дискретный оператор Шредингера J

Перенормируем многочлены $Q_n = z^n + \dots$

$$q_n := (b_0 b_1 \cdots b_{n-1}) Q_n, \quad q_0 = Q_0 = 1$$

Мн-ны q_n удовлетворяют реккурентным соотношениям:

$$b_{n-1} q_{n-1} + a_n q_n + b_n q_{n+1} = z q_n$$

В матричном виде (матрица Якоби) $J\vec{q} = \vec{q}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

В случае, когда $b_n > 0, \ \ a_n \in \mathbb{R}$ матрица Якоби определяет самосопряженный дискретный оператор Шредингера J.
При этом справедливо:

$$\pi_n(z) \underset{\overline{\mathbb{C}}\setminus \mathrm{Sp}(J)}{\rightrightarrows} f(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{z - \lambda}$$

II. Числа

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, ...], \quad [a_0; a_1, ..., a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\, q < q_n.$$

(среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

  1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0, q_1 = 1.$

  2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\, q < q_n.$$

  (среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\text{б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\, q < q_n.$$

(среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\text{б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

  1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

  2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\ q < q_n.$$

  (среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Спектр Маркова-Лагранжа

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup \ \tau \ : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} = \liminf_{q \to +\infty} q^2 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \liminf_{n \to +\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

- Структура спектра:
дискретный спектр - $\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \quad \ldots \to 3\} \to$
$[3, 3.6]$ - Cantor set (пример лакуны: $[3.1298, 3.1622]$)
$\to \cdots \to \cdots \to$ непрерывный спектр.

Спектр Маркова-Лагранжа

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup \tau \quad : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

  Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} = \liminf_{q \to +\infty} q^2 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \liminf_{n \to +\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

- Структура спектра:
  дискретный спектр - $\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \quad \ldots \to 3\} \to$
  $[3, 3.6]$ - Cantor set (пример лакуны: $[3.1298, 3.1622]$)
  $\to \cdots \to \cdots \to$ непрерывный спектр.

Спектр Маркова-Лагранжа

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup \ \tau \ \ : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

  Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} \ = \ \liminf_{q \to +\infty} q^2 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ = \liminf_{n \to +\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

- Структура спектра:
  дискретный спектр - $\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \quad \ldots \to 3\} \to$
  $[3, 3.6]$ - Cantor set (пример лакуны: $[3.1298, 3.1622]$)
  $\to \cdots \to \cdots \to$ непрерывный спектр.

Паттерны, динамические системы

- Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

$$\lambda(\alpha) \;=\; \limsup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] \;+\; [0; a_{n+1}, ...] \Big\}.$$

- ДЛО: $S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}, \quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}.$
- итерации $\qquad D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n.$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z),\ z \neq \alpha$$

- ИФС: $S_i(x) \in \{S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x}\}$

$\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}; \quad \mathbf{J}$ - $(...)$: $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}.$
$\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}.$

- Свойства $\mathbf{A}$: 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}.$

Паттерны, динамические системы

- Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \in \mathbb{Z}} \Big\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...] \Big\}.$$

- ДЛО: $S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}$, $\quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}$.
- итерации $\qquad D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n.$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z), \; z \neq \alpha$$

- ИФС: $S_i(x) \in \{S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x}\}$

  $\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$; $\quad \mathbf{J}$ - $(...)$: $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}$.
  $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}$.
- Свойства $\mathbf{A}$: 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}$.

Паттерны, динамические системы

- Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1] + [0; a_{n+1}, \ldots] \right\}.$$

- ДЛО: $S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}, \quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}.$
- итерации $\qquad D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n.$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z), \; z \neq \alpha$$

- ИФС: $S_i(x) \in \{S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x}\}$

$\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}; \quad \mathbf{J}$ - $(\ldots)$: $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}$.
$\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}$.

- Свойства $\mathbf{A}$: 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}$.

Паттерны, динамические системы

- Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{[a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...]\Big\}.$$

- ДЛО: $S_i(x) = \frac{1}{a_i+x}, \quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}.$
- итерации $\qquad D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n.$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z),\ z \neq \alpha$$

- ИФС: $S_i(x) \in \{S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x}\}$

$\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}; \quad \mathbf{J}$ - $(...)$: $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}$.
$\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}$.

- Свойства $\mathbf{A}$: 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}$.

Паттерны, динамические системы

- Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...] \right\}.$$

- ДЛО: $S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}$, $\quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}$.
- итерации $\qquad D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n$.

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n \to \infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z),\ z \neq \alpha$$

- ИФС: $S_i(x) \in \{S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x}\}$

  $\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$; $\quad \mathbf{J}$ - (...) : $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}$.
  $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}$.
- Свойства $\mathbf{A}$: 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}$.

2) строение **A**. 3) $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots] \in A_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \subset A_0$

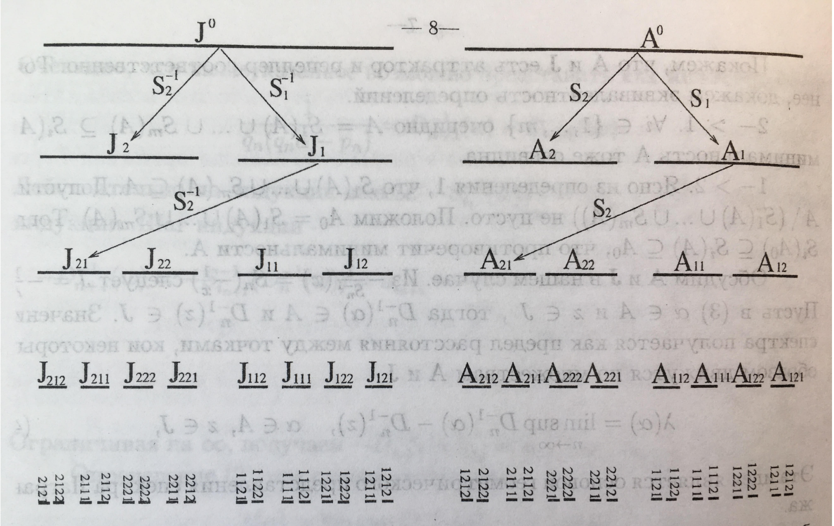
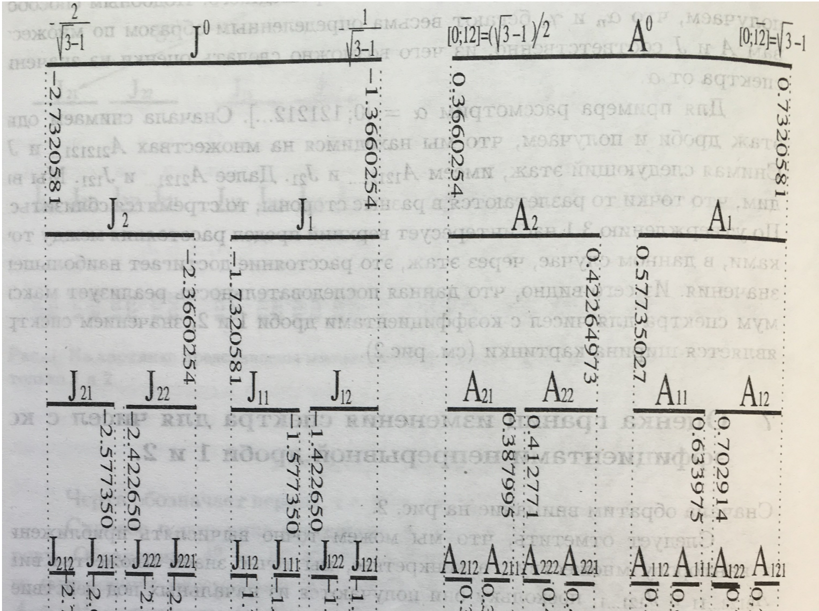


Рис. 1: На картинке представлены множества **A** и **J** для α, имеющих в своей цепной дроби только 1 и 2.

Динамика:

z кладем в J^0, $\alpha \in \mathbf{A}$ и поехали!



Теорема и дерево Маркова

Теорема: $\lambda(\alpha) = \left(9 - 4m^{-2}\right)^{1/2}$, где m :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3m\, m_1\, m_2, \quad m \geq \max(m_1, m_2), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Граф Маркова (Дерево?)

- $(1, 1, 1)$
  - $(2, 1, 1)$
    - $(5, 1, 2)$
      - $(13, 1, 5)$
        - $(34, 1, 13)$
        - $(194, 13, 5)$
      - $(29, 5, 2)$
        - $(433, 5, 29)$
        - $(169, 29, 2)$