# Окольцованные пр-ва (2-я часть Лекции 1).

<u>Обозначение</u> Если $V$ — топол. пр-во

$Cont(V,\mathbb{R})$ — это кольцо непрерывных ф-ций на $V$.

$Cont(V,\mathbb{C})$ — это кольцо непрерывных комплексно-значных функций на $V$.

$\exists\ V' \xrightarrow{\varphi} V$ — непр. отображение, $f \in Cont(V,\mathbb{C})$. Пишем $\varphi^*(f)$ вместо $f\circ\varphi$.

Заметим, что $\forall\, v' \in V'$ имеется р-во

$$\boxed{\varphi^*(f)(v') = f(\varphi(v')).}$$

<u>Опр.</u> Окольцованное пр-во — это пара $(X, \mathcal{O}_X)$, где $X$ — топол. пр-во, $\mathcal{O}_X$ — это <u>правило</u>, которое каждому открытому $V \subset X$ сопоставляет подкольцо $\mathcal{O}_X(V)$ кольца $Cont(V,\mathbb{C})$, содержащее константы $\mathbb{C} \subset Cont(V,\mathbb{C})$ и такое (правило), что

1) $\forall\ V_2 \subset V_1 \subset X$ открытых и $\forall\ f \in \mathcal{O}_X(V_1)$ $\quad f|_{V_2} \in \mathcal{O}_X(V_2)$

2) $\forall\ V \subset X$ и $\forall$ покрытия $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ и $\forall\ f \in Cont(V,\mathbb{C})$

$$f \in \mathcal{O}_X(V) \iff \forall\, i \quad f|_{V_i} \in \mathcal{O}_X(V_i).$$

(т.е. св-во $f \in \mathcal{O}_X(V)$ — это локальное свойство).

<u>Термин</u> Правило $\mathcal{O}_X$ называют <u>пучком</u> колец на $X$.

Итак, окольцованное пр-во — это пара $(X, \mathcal{O}_X)$, где $X$ — топ. пр-во, $\mathcal{O}_X$ — пучок колец на $X$. (Если $V \subset X$ - отр., то $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ - окольц. пр-во. $\forall\ W \subset V$ $\quad \mathcal{O}_X|_V(W) \overset{\text{опр}}{=} \mathcal{O}_X(W)$.

<u>Примеры</u> (пучков колец $\mathcal{O}_X$)

1. $\forall\ V \subset X$ $\quad \mathcal{O}_X(V) = Cont(V,\mathbb{C})$ Будем обозначать этот пучок $\mathcal{O}_X^{cont}$;

2. $\forall\ V \subset X$ $\quad \mathcal{O}_X(V) = \mathbb{C}$ (?) (нет: $\mathcal{O}_X(V) = Func(Comp(V),\mathbb{C})$); $\mathcal{O}_X^{const}$

Здесь $Comp(V)$ - мн-во компонент связности пр-ва $V$.

<u>Замечание</u> Показать, что правило $V \mapsto \mathcal{O}_X(V) = \mathbb{C}$ — это <u>НЕ</u> пучок.

<u>Опр.</u> Морфизм <u>окольцованных</u> <u>пространств</u> $(X', \mathcal{O}_{X'}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ — это непрерывное отображение $\varphi: X' \to X$ такое, что $\forall\ V \subset X$ и $\forall\ f \in \mathcal{O}_X(V)$ $\quad \varphi^*(f) \in \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(V))$.

<u>Замечание</u> 1) если $(X', \mathcal{O}_{X'}) = (X, \mathcal{O}_X)$, то $id_X : X \to X$ — морфизм окольцованных пр-в;

2) если $\psi: (X'', \mathcal{O}_{X''}) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ — морфизм ок. пр-в, то $\varphi\circ\psi : (X'', \mathcal{O}_{X''}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ — морфизм окольц. пр-в.

Замечание. Пусть $X = S^2$ или $X$ — сфера с ручками. Тогда $id_X$ — это морфизм окольц. пр-в $(X, \mathcal{O}_X^{cont}) \to (X, \mathcal{O}_X^{const})$

$id_X$ — НЕ является морфизмом $(X, \mathcal{O}_X^{const}) \to (X, \mathcal{O}_X^{cont})$

Замечание. Пусть $(X, \mathcal{O}_X) = (S^2, \mathcal{O}_{S^2}^{diff})$. Тогда $id_{S^2}$ НЕ является морфизмом $(S^2, \mathcal{O}_{S^2}^{diff}) \to (S^2, \mathcal{O}_{S^2}^{cont})$.

Опр. Морфизм $\varphi : (X', \mathcal{O}_{X'}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ окольц. пр-в наз-ся изоморфизмом, если $\exists$ морфизм $\psi : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ ОПр-в такой, что $\psi \circ \varphi = id$ и $\varphi \circ \psi = id$.

НА СЛЕД. ЛЕКЦИИ

Определим понятие комплексной кривой

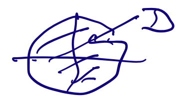
Опр. Комплексная кривая — это окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ локально изоморфное окольц. пр-ву $(D, \mathcal{O}_D^{hol})$, где $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, $\mathcal{O}_D^{hol}$ — пучок голоморфных функций на $D$.

# Лекция 2

## Комплексные кривые

**Опр.** Пусть $V \subset \mathbb{C}$ открыто, $f: V \to \mathbb{C}$ — ф-ция. Говорят, что $f$ голоморфна, если $\forall v \in V$ $\exists \varepsilon > 0$ и
$\exists$ ряд $g(z-v) = a_0 + a_1(z-v) + a_2(z-v)^2 + \dots \qquad a_i \in \mathbb{C}$
такие, что
1) ряд $g(z-v)$ абсолютно сходится при $|z-v| < \varepsilon$
2) $\forall z$ с $|z-v| < \varepsilon$ $\quad f(z) = g(z-v)$

**Обозначение** $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$



**Опр.** Пучком $\mathcal{O}_D^{hol}$ называется пучок на $D$, заданный правилом $V \longmapsto \mathcal{O}_D^{hol}(V) \overset{опр}{=} \{f \in Cont(V, \mathbb{C}) \,/\, f \text{ голоморфна}\}$.

**Опр.** Окольцованное пр-во $(D, \mathcal{O}_D^{hol})$ наз-ся комплексным диском.

**Опр.** Комплексная кривая — это окольцованное пр-во (ОПр-во = ОП) $(X, \mathcal{O}_X)$, которое локально изоморфно комплексному диску.
$\forall$ откр. $V \subset X$ ф-ции из $\mathcal{O}_X(V)$ наз-ся голоморфными ф-ми на $V$.

**Примеры** 1) $(X, \mathcal{O}_X) = (D, \mathcal{O}_D^{hol})$

2) $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol})$ $\quad$ Замеч. $z \mapsto \bar{z}$ $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ — не морфизм $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol})$

3) $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol})$ $\qquad \mathbb{CP}^1 = \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C} \\ z}}{(\mathbb{CP}^1 - \infty)} \cup \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C} \\ z^{-1}}}{(\mathbb{CP}^1 - 0)}$

$v = 0 \in \mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 - \infty$, то $(D, \mathcal{O}_D^{hol}) = (D, \mathcal{O}_D^{hol})$, где $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$.

$v = a \in \mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 - \infty$, то $(D, \mathcal{O}_D^{hol}) \xrightarrow{\sim} (D(a), \mathcal{O}_{D(a)}^{hol}) \qquad (z \longmapsto z + a)$

$v = \infty \in \mathbb{CP}^1$, то $(D, \mathcal{O}_D^{hol}) \xrightarrow{\sim} (D(\infty), \mathcal{O}_{D(\infty)}^{hol})$

$$z \longmapsto 1/z$$

$$|z| < 1 \iff |1/z| > 1$$

**Пример**

$$\begin{tikzcd}
 & E \overset{опр}{=} \mathbb{C}/L \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathbb{C} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\mathbb{C} & V \arrow[l, "f"'] & \pi^{-1}(V) \arrow[l, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

, где $\underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}}{L} \subset \mathbb{C}$ — решетка

$f$ назовем $\in \mathcal{O}_E^{hol}(V)$, если и только, если $\pi^*(f) = f \circ \pi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol}(V)$

Тогда $(E, \mathcal{O}_E^{hol})$ — называют эллиптической кривой.

<u>Опр</u> Пусть $(X', \mathcal{O}_{X'})$, $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексные кривые.
Голоморфное отображение $(X', \mathcal{O}_{X'})$ в $(X, \mathcal{O}_X)$ — это просто морфизм окольцованных пространств. Другими словами это непрерывное отображение $\varphi: X' \to X$ такое, что $\forall\ V \subset X$ открытого и $\forall\ f \in \mathcal{O}_X(V)$ $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_{X'}(\varphi^{-1}(V))$.

<u>Замечание</u> Композиция голоморных отображений — голоморфное отображение. Тождественное отображение голоморфно. Отображение вида

$$X' \longrightarrow \text{точка} \hookrightarrow x \in X$$

голоморфно. Последнее отображение наз-ся ПОСТОЯННЫМ.

<u>Замечание</u> ] $(X, \mathcal{O}_X)$ - комплексная кривая,
$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol})$ голоморфное отображение.
Тогда $f: X \to \mathbb{C}$ является голоморфной функцией на $X$.
т.е. $f \in \mathcal{O}_X(X)$.

Обратно: если $f \in \mathcal{O}_X(X)$, то $f: X \to \mathbb{C}$ — это голоморфное отображение $(X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{hol})$.

Ближайшая цель — д-ть

<u>Теорему</u> Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — голоморфные кривые такие, что $X$ и $Y$ — это сферы с ручками. Пусть $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — это НЕ постоянное голоморфное отображение. Тогда $\varphi: X \to Y$ — это <u>разветвленное накрытие</u> в смысле Лекции 1.