

Задачи к лекции Ферника

Оранжевые плитки находятся около X_2 , красные-белые плитки около X_1 и синяя плитка около K_3 .

Просьба плитки на месте оставить!

Золотая энтропия. Энтропия множества слов $-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_n}{n}$, где x_n число подслов длины n . Почему она существует? Вычислите энтропию множества слов из символов 0 и 1, где 1 никогда не следует за 1.

Слова Штурма. Слово Штурма угла $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и выпуска $\rho \in \mathbb{R}$ – слово с символом 0 на $n^{\text{ом}}$ месте если $(\rho + n\alpha) \bmod 1 \in [0, 1 - \alpha)$, 1 иначе. Докажите, что у любого слова Штурма ровно $n + 1$ подслов длины n .

Оранжевые плитки. Соберите плитки чтобы замостить квадрат 15×15 . Как замостить всю плоскость бесконечным числом таких плиток?

Чётный сдвиг. Пусть $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ множество “ d -мерных слов” таких, что размер каждой конечной компоненты связности символа 0 – чётный. Является ли чётный сдвиг X софическим? А нечётный сдвиг?

Красные-белые плитки. Как замостить всю плоскость бесконечным числом таких плиток?

Трудолюбивая машина. Машина Тьюринга в состоянии q_0 , с одними # на ленте. Переходит ли она когда-нибудь в состояние \square ?

состояние	читает 0/#			читает 1			читает 2		
	пиш.	двиг.	в сост.	пиш.	двиг.	в сост.	пиш.	двиг.	в сост.
q_0	1	\rightarrow	q_1	2	\leftarrow	q_0	1	\leftarrow	q_2
q_1	0	\leftarrow	q_0	2	\rightarrow	q_1	1	\leftarrow	q_1
q_2	1	\rightarrow	\square	1	\rightarrow	q_0	1	\rightarrow	q_2

Синяя плитка. Докажите, что такой плиткой нельзя замостить плоскость. Какой максимальный радиус круга, который Вы можете замостить? Можете ли Вы придумать плитку, которая замостит больший круг, но не всю плоскость (или только непериодическим способом)?

Подпериодичность. Пусть $E \subset \mathbb{R}^4$ – плоскость, порождённая векторами

$$(\cos(2k\pi/4))_{0 \leq k \leq 3} \quad \text{и} \quad (\sin(2k\pi/4))_{0 \leq k \leq 3}.$$

Найдите все плоскости F такие, что $\pi_k(F) \cap \mathbb{Z}^3 = \pi_k(E) \cap \mathbb{Z}^3$, $1 \leq k \leq 4$, π_k – ортогональная проекция вдоль $k^{\text{ого}}$ вектора стандартного базиса.