

Аннотация. Теория симплициальных комплексов, т.е. гиперграфов, — раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования, бурно развивающийся в последнее время. Хорошо известно, что существует линейный алгоритм распознавания вложимости графа в плоскость. Будет рассказано об алгоритмах распознавания вложимости n -мерных гиперграфов в m -мерное евклидово пространство. В частности, будет намечено доказательство NP-трудности этой алгоритмической проблемы при $6 < 2m < 3n + 3$ (Matousek et al, <http://arxiv.org/abs/math/0807.0336>). Будет показано, как некоторая заведомо NP-трудная проблема о булевских функциях сводится к проблеме распознавания вложимости.

Будет дан популярный обзор с основными идеями доказательств. Все ‘нешкольные’ определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность) будут даны. Основные идеи будут представлены на ‘олимпиадных’ примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка.

Примерная программа (отмеченное звездочкой не рассказано и не вошло в этот текст)

1. Основные определения и результаты.
 - 1.1. Определение 1-мерного и 2-мерного полиэдров.
 - 1.2. Пример: подразбиение грани.
 - 1.3. Кусочно-линейные вложения в плоскость и R^n .
 - 1.4. Теорема общего положения.
 - 1.5. Алгоритмические результаты о вложимости 2-мерных полиэдров. Определение NP и NP-трудности.
 - 1.6. Алгоритмические результаты о вложимости многомерных полиэдров. (Матушек-Танцер-Вагнер). Таблица.
2. Вложения в плоскость.
 - 2.1. Непланарность графа K_5 . Свойство зацепленности.
 - 2.2. Теорема Куратовского. Кнопка. Теорема Халина-Юнга.
 - 2.3.* Доказательство теоремы Халина-Юнга.
3. Вложения в трехмерное пространство.
 - 3.1. Невложимость в R^3 конуса над K_5 . Свойство зацепленности.
 - 3.2.* Проблемы и результаты о вложимости 2-мерных полиэдров в R^3 (и в 3-мерные многообразия). (Jaco-Sedgwick, Tonkonog)
 - 3.3. Построение колец Борромео при помощи тора.
 - 3.4. Трехмерный аналог примера Фридмана-Крушкаля-Тайхнера.
 - 3.5. Обобщения: $x_1 \vee \bar{x}_1$, $x_1x_2 \vee \bar{x}_1$, $x_1x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. $x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2$.
 - 3.6. Построение 2-мерного полиэдра, отвечающего булевой функции.
 - 3.7. Необходимое условие вложимости в R^3 такого 2-мерного полиэдра: $f(x) = 0$ для некоторого x . Гипотеза о достаточности.
4. Вложения в четырехмерное пространство.
 - 4.1. Примеры 2-мерных полиэдров, неволожимых в R^4 . Зацепленность для 2-остова 6-симплекса.
 - 4.2. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера и его обобщения.
 - 4.3. Критерий вложимости в R^4 2-мерного полиэдра, отвечающего булевой функции.
 - 4.4.* Обобщение на многомерные полиэдры.

¹Обновляемая версия поддерживается на www.mscme.ru/circles/oim/algor.pdf.

Задачи к первому занятию.

1. Обозначим через K_5 граф с пятью вершинами 1, 2, 3, 4, 5, любые две из которых соединены ребром. Докажите, что граф K_5 не планарен.

2. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребра (12), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345.

3. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребер (12) и (13), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от цикла 245.

4. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребер (12), (13) и (14), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от цикла 245.

ЛИБО точки 1 и 4 находятся по разные стороны от цикла 235.

5. Ой... Вы уже догадались, как формулируется эта задача и вообще как при изучении вложимости возникают булевы функции.

Доказательство непланарности графа K_5 . Возьмем любое отображение общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда пересечение образов любых двух ребер состоит из конечного числа точек.

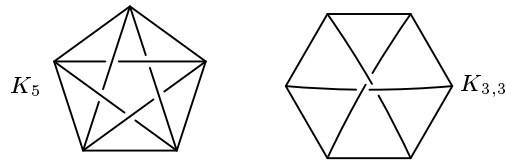


Рис. 1: Графы Куратовского

Обозначим через $v(f)$ сумму по модулю 2 чисел $|f\sigma \cap f\tau|$ по всем неупорядоченным парам $\{\sigma, \tau\}$ несмежных ребер графа K_5 .

Для отображения $f_0 : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, образ которого изображен на рис. 1 слева, $v(f_0) = 1$.

Пусть $f, f' : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — два отображения общего положения, отличающиеся только на внутренности ребра ab (рис. 2). Для каждого ребра e графа K_5 ребра, несмежные с e , образуют цикл S (это то самое свойство графа K_5 , которое необходимо для доказательства). Поэтому

$$v(f) - v(f') = |[f(e) \cup f'(e)] \cap f(S)| \pmod{2} = 0.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку

любые два цикла общего положения на плоскости пересекаются в четном числе точек.

Это интуитивно очевидное утверждение следует из формулы Эйлера.

Любое отображение f общего положения может быть заменено на f_0 последовательностью нескольких гомеоморфизмов плоскости \mathbb{R}^2 и нескольких изменений внутренности лишь одного ребра (мы не доказываем это интуитивно очевидное утверждение).

Значит, $v(f) = 1$ для *любого* отображения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Следовательно, K_5 не планарен. QED

6. Граф $K_{3,3}$ (рис. 1) не планарен.

Наглядные задачи.

Тор, лист Мебиуса и сфера с ручками изображены на рис. 3.

7. Можно ли нарисовать без самопересечений графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 1)

(а) на торе? (б) на листе Мебиуса?

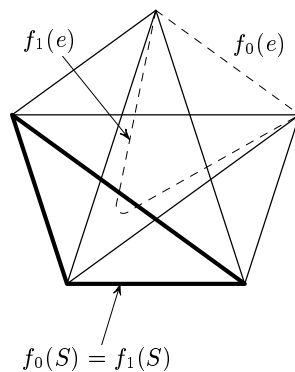


Рис. 2: Независимость $v(f)$ от f . Заменить f_0 и f_1 на f и f' !!!

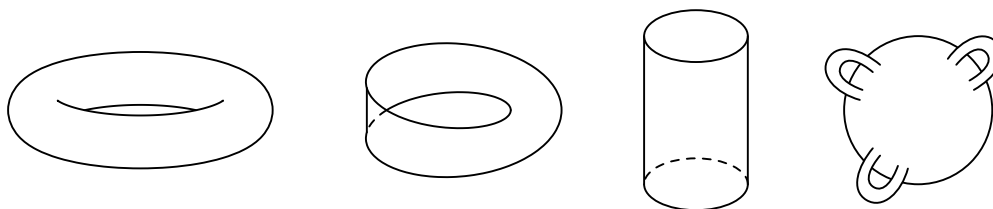


Рис. 3: Тор, лист Мебиуса, цилиндр и сфера с ручками

(с) на сфере? (d) на боковой поверхности цилиндра (т.е. в кольце)?

8. Любой граф можно нарисовать без самопересечений

(a) в пространстве.

(b) на сфере с некоторым количеством ручек, зависящим от конкретного графа.

9. (a) Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, повесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

(b) Как зацепить три резиновых кольца в пространстве, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись?

Формулировка основных результатов.

Двумерным симплициальным комплексом (или гиперграфом) называется семейство двухэлементных и трехэлементных подмножеств конечного множества, которое вместе с каждым трехэлементным множеством содержит все три его двухэлементные подмножества. Мы будем сокращенно называть двумерный симплициальный комплекс просто комплексом. Элементы данного конечного множества называются *вершинами* комплекса, выделенные двухэлементные подмножества — *ребрами* комплекса, а выделенные трехэлементные подмножества — *гранями* комплекса.

Примеры. (1) Двумерный остов n -мерного симплекса. Вершины — $1, 2, \dots, n, n + 1$, все двухэлементные и трехэлементные подмножества выделены.

(2) Кнопка. Вершины — $c, 0, 1, 2, 3$; выделены трехэлементные подмножества $\{012\}$, $\{013\}$ и $\{023\}$; выделены все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$.

Из следующих объектов можно изготовить двумерные симплициальные комплексы: сфера с ручками, шутовской колпак Зимана, пространство склейки квадрата или даже многоугольника, октаэдр с половиной боковых граней и диагональными плоскостями, декартово произведение графов (рисунки даны на лекции).

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 4 слева.

10. Операция *подразделения грани* на рис. 4 справа выражается через операцию подразделения ребра.

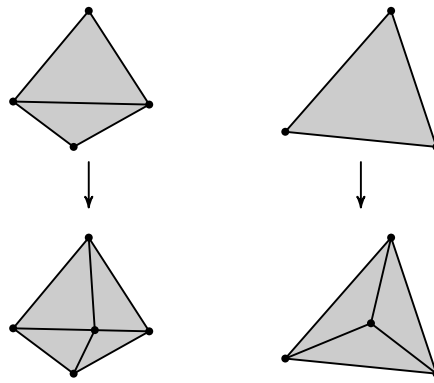


Рис. 4: Подразделение ребра и грани двумерного симплициального комплекса

Два (двумерных симплициальных) комплекса *гомеоморфны*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним.

11. Пространство склейки квадрата с обращенными стрелками гомеоморфно октаэдру с диагональными плоскостями.

Двумерным полиэдром называется класс эквивалентности комплексов с точностью до гомеоморфизма. Представители этих классов эквивалентности называются *триангуляциями* соответствующего двумерного полиэдра.

Возьмем конечное число точек в \mathbb{R}^m , соответствующих вершинами некоторого комплекса. Проведем отрезки, соответствующие двухэлементным подмножествам, и двумерные треугольники, соответствующие трехэлементным подмножествам. Назовем пустое множество, проведенные точки, отрезки и треугольники *симплексами* (размерностей $-1, 0, 1, 2$, соответственно). Обозначим через φ соответствие между симплексами и подмножествами. Заномерованное конечное множество в \mathbb{R}^m называется *линейным вложением* (или реализацией) комплекса, если пересечение любых двух симплексов σ и τ есть симплекс $\varphi^{-1}(\varphi(\sigma) \cap \varphi(\tau))$, соответствующий пересечению $\varphi(\sigma) \cap \varphi(\tau)$ соответствующих подмножеств $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$.

- 12.** (а) Кнопка допускает линейное вложение в \mathbb{R}^3 .
 (б) Допускает ли кнопка линейное вложение в \mathbb{R}^2 ?
 (в) Любой комплекс допускает линейное вложение в \mathbb{R}^5 .

13. Обозначим через $\text{cop}K_5$ комплекс с шестью вершинами $0, 1, 2, 3, 4, 5$, любые две из которых соединены ребром, и гранями $(0ij)$.

- (а) Комплекс $\text{cop}K_5$ допускает линейное вложение в \mathbb{R}^4 .
 (б) Комплекс $\text{cop}K_5$ не допускает линейного вложения в \mathbb{R}^3 , при котором некоторые 4 вершины лежат в одной плоскости.
 (в) Комплекс $\text{cop}K_5$ не допускает никакого линейного вложения в \mathbb{R}^3 .
 (г) Комплекс $\text{cop}K_5 - (012)$, получающийся из $\text{cop}K_5$ удалением внутренней грани (012) , допускает линейное вложение в \mathbb{R}^3 .

14. Утверждение. Существует алгоритм распознавания линейной вложимости комплексов

- (а) в \mathbb{R}^3 ; (б) в \mathbb{R}^4 .
 (а'), (б') Оцените сложность этого алгоритма.

Кусочно-линейным вложением комплекса называется линейное вложение некоторого гомеоморфного ему комплекса.

Теорема Фари. (а) Если одномерный симплициальный комплекс кусочно-линейно вложим в плоскость, то он линейно вложим в плоскость. (Определения аналогичны вышеприведенным.)

(b) Если двумерный симплициальный комплекс кусочно-линейно вложим в плоскость, то он линейно вложим в плоскость.

15. Приведите пример комплекса, допускающего кусочно-линейное вложение в \mathbb{R}^3 , но не допускающего линейного вложения в \mathbb{R}^3 .

Именно двумерные полиэдры и их (т.е. их триангуляций) кусочно-линейные вложения интересны топологу. А комплексы и линейные вложения — средства изучения и хранения в компьютере. Впрочем, они интересны дискретному геометру и комбинаторщику.

Теорема Куратовского.

Теорема Халина-Юнга.

Теорема. Существует алгоритм распознавания кусочно-линейной вложимости комплексов в плоскость.

Гипотеза. (a) Существует алгоритм распознавания кусочно-линейной вложимости комплексов в трехмерное пространство.

(b) Алгоритмическая проблема распознавания кусочно-линейной вложимости комплексов в трехмерное пространство является NP-трудной.

Общепринятое формальное определение NP-трудности непросто. Мы будем использовать следующее эквивалентное определение. Алгоритмическая проблема, зависящая от целочисленного параметра n , называется NP-трудной, если, имея автомат для ее решения за 1 шаг, можно построить полиномиальный по n алгоритм распознавания тождественности нулю булевой функции от n переменных, заданной в качестве дизъюнкции конъюнкций.

Частный Случай Основной Теоремы. (Matoušek-Tancer-Wagner, 2008) Алгоритмическая проблема распознавания кусочно-линейной вложимости комплексов в четырехмерное пространство является NP-трудной.

Мы проиллюстрируем идею доказательства этой теоремы на трехмерных ‘олимпиадных’ примерах. Пусть имеется формула f для булевой функции, являющаяся конъюнкцией дизъюнкций, например, $x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4$. Пусть при этом в каждом ‘слагаемом’ не более трех ‘сомножителей’. Мы построим комплекс P_f так, что будет выполняться следующее свойство: если P_f кусочно-линейно вложим в \mathbb{R}^3 , то $f \equiv 1$. Аналогично можно построить комплекс Q_f со следующим свойством: Q_f кусочно-линейно вложим в \mathbb{R}^4 тогда и только тогда, когда $f \equiv 1$; этого достаточно для доказательства Частного Случая Основной Теоремы.

Рамсеевская теория зацеплений.

Набор точек в пространстве находится в общем положении, если никакие 4 точки из этого набора не лежат в одной плоскости.

18. (a) (Рис. 5) Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, расположенных в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно, находится в общем положении.

(b) Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении.

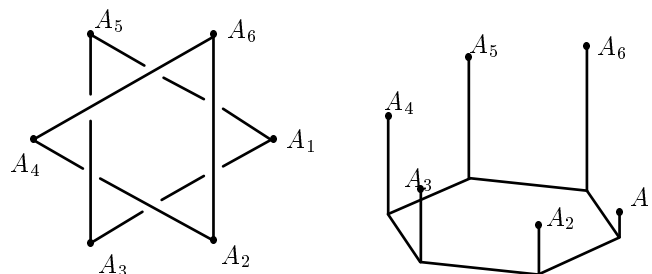


Рис. 5: Точки общего положения

Далее Δ и Δ' — два треугольника в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении. Эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке.

Например, треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ из задачи 18а зацеплены.

Будем сокращенно называть кусочно-линейное вложение просто вложением.

19. (а) Если контур одного из треугольников Δ, Δ' не пересекается с плоскостью другого треугольника, то Δ и Δ' не зацеплены.

(б) Для каких положений точки A_1 из задачи 18а на вертикальной прямой треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ зацеплены?

(с) Как по проекции пары треугольников на плоскость общего положения выяснять, зацеплены они или нет?

20. Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Назовем *разбиением* неупорядоченную пару треугольников с вершинами в этих точках, не имеющих общих вершин. *Зацепленностью* данной шестерки точек назовем четность количества зацепленных разбиений.

(а) Треугольники зацеплены тогда и только тогда, когда количество точек пересечения их проекций на плоскость общего положения, в которых контур первого проходит *над* контуром второго, нечетно.

(б) Зацепленность не зависит от выбора шестерки точек.

(с) Приведите пример шестерки точек, зацепленность которой равна 1.

(д) Найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в данных 6 точках.

21. (а) Пусть на прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они перемежаются, т.е. расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная) (смотря с какой стороны идти).

Треугольники Δ и Δ' зацеплены \Leftrightarrow выполнены следующие 3 условия:

(1) плоскости треугольников Δ и Δ' пересекаются по некоторой прямой l ;

(2) каждое из множеств $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек (здесь и далее Δ и Δ' обозначают контуры треугольников);

(3) пары точек $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ зацеплены на прямой l .

(б) Зацепленность треугольников не изменяется, если их вершины движутся в пространстве, оставаясь в общем положении.

(с) Треугольники Δ и Δ' зацеплены \Leftrightarrow треугольники Δ' и Δ зацеплены.

Будем говорить, что две замкнутые несамопересекающиеся ломаные в пространстве имеют *нечетный коэффициент зацепления*, если на первую из них можно натянуть (кусочно-линейно) вложенный диск, пересекающий вторую в нечетном количестве точек, в каждой из которых пересечение *общего положения*, т.е. два звена ломаной, выходящие из точки пересечения, находятся по разные стороны от диска (в окрестности точки пересечения).

Будем сокращенно называть *зацепленными* две замкнутые несамопересекающиеся ломаные в пространстве, имеющие нечетный коэффициент зацепления. (Заметим, что в математике определение зацепленности другое.)

22. Теорема Конвея–Гордона–Закса, 1981. Пусть в пространстве даны 6 точек, любые две из которых соединены несамопересекающимися ломаными, причем пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. (Т.е. пусть дано кусочно-линейное вложение графа K_6 в \mathbb{R}^3 .) Тогда найдутся два зацепленных цикла длины 3.

23. (а) При любом вложении комплекса $\text{cop}K_5 - (012)$ в \mathbb{R}^3 замкнутые ломаные 012 и 345 зацеплены.

(б) Комплекс $\text{cop}K_5 - (012) - (013)$, получающийся из $\text{cop}K_5$ удалением (внутренностей) граней 012 и 013, допускает вложение в \mathbb{R}^3 , и при любом таком вложении либо замкнутые ломаные 012 и 345 зацеплены,

либо замкнутые ломаные 013 и 245 зацеплены.

(с) Комплекс $\text{cop}K_5 - (012) - (013) - (014)$, получающийся из $\text{cop}K_5$ удалением граней 012, 013 и 014, допускает вложение в \mathbb{R}^3 , и при любом таком вложении

либо замкнутые ломаные (012) и (345) зацеплены,

либо замкнутые ломаные (013) и (245) зацеплены,

либо замкнутые ломаные (014) и (235) зацеплены.

24. (а) Если замкнутый многогранник пересекает замкнутую ломаную трансверсально и вне точек самопересечения многогранника и ломаной, то число точек пересечения многогранника и ломаной четно.

(б) Если одна замкнутая ломаная ограничивает (кусочно-линейно вложенный) диск, не пересекающий другую замкнутую ломаную, то эти ломаные не зацеплены.

Кольца Борромео.

Нестандартное построение колец Борромео (решение задачи 9b). Рассмотрим стандартный тор в трехмерном пространстве. Первое из колец Борромео — окружность вне тора, близкая к меридиану тора. Второе из колец Борромео — окружность вне тора, зацепленная со вторым меридианом тора, и пересекающая тор в двух точках. Третье из колец Борромео — окружность S на торе, близкая к границе квадрата, полученного из тора разрезанием вдоль параллели и второго меридиана. Ее невозможно стащить с объединения первых двух, что было экспериментально проверено на занятии.

Лемма о кольцах Борромео. *В трехмерном пространстве не существует двух замкнутых несамопересекающихся ломаных S_1, S_2 и вложенного тора, для которых*

- S_1 и S_2 не зацеплены;
- S_1 и параллель тора зацеплены;
- S_2 и меридиан тора зацеплены;
- ни S_1 , ни S_2 не пересекает тор.

Пояснение связи с кольцами Борромео. Если существуют, то S_1, S_2 и S образуют кольца Борромео. Но S можно стянуть с S_1 и S_2 по тору.

25. (1,2,4) Любые 3 из этих свойств могут выполняться одновременно.

Основная идея.

Чтобы показать основную идею без технических подробностей, сначала построим комплекс P_f для частных случаев.

Обозначим через T комплекс, получающийся из 8-угольника склейкой сторон в соответствии со словом $abc^{-1}a^{-1}cb^{-1}c^{-1}$ (см. рис.). Этот комплекс получается из тора склейкой дуг PQ и RQ , лежащих на торе и имеющих общий конец. Его *меридианом* a и *параллелью* b назовем окружности, отвечающие буквам a и b , соответственно. Его *древком* c назовем отрезок, отвечающий букве c .

Обозначим через $[u, v]$ отрезок с концами u и v . Обозначим $K := \text{cop}K_5 \cup [0u]$. Будем обозначать штрихами копии комплексов и их элементов. Через (ijk) обозначим грань комплекса $\text{cop}K_5$ (или внутренность грани — что именно, видно из контекста). Через $[ijk]$ обозначим объединение ломаных ij, jk, ki комплекса $\text{cop}K_5$.

Комплекс $P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$, невлижсимый в \mathbb{R}^3 . Положим

$$P_{x_1 \vee \bar{x}_1} := [K - (012)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)'] \bigcup_{\substack{[012]=a, \\ [012]'=b, \\ [0u] \cup [0u]'=c}} T.$$

Пусть, напротив, $P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$ вложен в \mathbb{R}^3 . Тогда рассмотрим его как подмножество в \mathbb{R}^3 . Замкнутая ломаная $[345]$ ограничивает диск $(034) \cup (045) \cup (045)$, не пересекающий параллели $[012]' = b$. Значит, замкнутые ломаные $[345]$ и $[012]' = b$ не зацеплены. Аналогично замкнутые

ломанные $[345]'$ и $[012] = a$ не зацеплены. По теореме Конвея-Гордона-Закса замкнутая ломаная $[345]$ зацеплена с меридианом $[012] = a$. Аналогично замкнутая ломаная $[345]'$ зацеплена с параллелью $[012]' = b$. По определению вложения замкнутые ломаные $[345]$ и $[345]'$ не пересекают подкомплекса $T \subset P_{x_1 \sqrt{x_1}}$. Противоречие с аналогом леммы о кольцах Борромео для комплекса T .

26. (а) Следующий комплекс вложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \sqrt{x_1}} := P_{x_1 \sqrt{x_1}} - (013) = [K - (012) - (013)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)'] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]'=b, \\ [0u] \cup [0u]'=c}} T.$$

(b) Следующий комплекс невложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)'] \bigcup_{u=u''} [K'' - (013)''] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]'=b, \\ [013]=a', [013]''=b', \\ [0u] \cup [0u]'=c, [0u] \cup [0u]''=c'}} T \cup T'.$$

(c) Следующий комплекс вложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \sqrt{x_1} \bar{x}_2} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)' - (013)'] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]'=b, \\ [013]=a', [013]'=b', \\ [0u] \cup [0u]'=c=c'}} T \cup T'.$$

(По крайней мере, поймите, почему не проходит доказательство невложимости.)

(d) Следующий комплекс невложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 x_3 \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} \sqrt{x_3}} := [K - (012) - (013) - (014)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)'] \bigcup_{u=u''} [K'' - (013)''] \bigcup_{u=u'''} [K''' - (014)'''] \bigcup_{\substack{[012]=a', [012]'=b', \\ [013]=a'', [013]''=b'', \\ [014]=a''', [014]'''=b''', \\ \dots}} T' \cup T'' \cup T'''. \dots$$

(e) Следующий комплекс невложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \sqrt{x_1} \bar{x}_2 \sqrt{x_1}} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{u=u'} [K' - (012)' - (013)'] \bigcup_{u=u''} [K'' - (012)''] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]''=b, \\ [012]'=a', [012]''=b', \\ [013]=a'', [013]'=b'', \\ \dots}} T \cup T' \cup T''.$$

Основная лемма. Пусть задана формула

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{s=1}^m x_{p_s(2)}^{\alpha_s} x_{p_s(3)}^{\beta_s} x_{p_s(4)}^{\gamma_s}.$$

Здесь $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$ и $p_s : \{2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ инъекции. Положим

$$P_f := \bigcup_{s=1}^m [K - (012) - (013) - (014)]_s \bigcup_{\substack{[01p_i^{-1}(k)]_i=a_{ijk}, [01p_j^{-1}(k)]_j=b_{ijk}, \\ u_1=u_2=\dots=u_m}} \bigcup_{ijk} T_{ijk}.$$

Здесь индексы s и ijk означают номер копии, причем ijk пробегает все (упорядоченные) тройки $(i, j, k) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, для которых в i -м слагаемом есть x_k , а в j -м есть \bar{x}_k (такие тройки назовем конфликтными).

Если P_f вложим в \mathbb{R}^3 , то существует \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$.

27. Если $f \equiv 1$, то существует

(а) конфликтная тройка ijk .

(б) конфликтная тройка ijk , для которой x_k и \bar{x}_k стоят на первом месте.

Доказательство. Пусть, напротив, $f \equiv 1$ и P_f вложен в \mathbb{R}^3 . Тогда рассмотрим P_f как подмножество в \mathbb{R}^3 . По теореме Конвея-Гордона-Закса, не уменьшая общности, для любого $s = 1, 2, \dots, m$ замкнутые ломаные $[345]_s$ и $[012]_s$ зацеплены. Так как $f \equiv 1$, то для любого выбора одного сомножителя из каждого ‘слагаемого’ найдутся два сомножителя x_k и \bar{x}_k . То есть существует конфликтная тройка ijk , для которой x_k и \bar{x}_k стоят на первом месте (т.е. $p_i(2) = p_j(2) = k$).

Замкнутая ломаная $[345]_i$ ограничивает диск $(034)_i \cup (045)_i \cup (045)_i$, не пересекающий параллели $[012]_j = b_{ijk}$. Значит, замкнутые ломаные $[345]_i$ и $[012]_j = b_{ijk}$ не зацеплены. Аналогично замкнутые ломаные $[345]_j$ и $[012]_i = a_{ijk}$ не зацеплены. По определению вложения замкнутые ломаные $[345]_i$ и $[345]_j$ не пересекают подкомплекса $T_{ijk} \subset P_f$. Противоречие с аналогом леммы о кольцах Борромео для комплекса T . QED

28.** Верно ли, что если существует \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$, то P_f вложим в \mathbb{R}^3 ?

Это нерешенная задача, из которой вытекает NP-трудность алгоритмической проблемы распознавания кусочно-линейной вложимости комплексов в трехмерное пространство.

29. Придумайте в четырехмерном пространстве вложенные попарно непересекающиеся окружность, сферу и сферу, из которых любые два объекта без третьего можно растащить в непересекающиеся шары, а все три вместе — нельзя.

Рамсеевская теория зацеплений в \mathbb{R}^4 .

30. Обозначим через L комплекс с семью вершинами $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, любые две из которых соединены ребром, и на любые три из которых натянута грань.

(а) Комплекс L не вложим в \mathbb{R}^4 .

(б) Комплекс $L - (012)$, получающийся из L удалением грани (012) , вложим в \mathbb{R}^4 .

Будем говорить, что замкнутая несамопересекающаяся ломаная (т.е. вложенная окружность) и вложенная сфера в четырехмерном пространстве имеют *нечетный коэффициент зацепления*, если на ломаную можно натянуть (кусочно-линейно) вложенный диск, пересекающий сферу в нечетном количестве точек.

Будем сокращенно называть *зацепленными* окружность и сферу в четырехмерном пространстве, имеющие нечетный коэффициент зацепления. (Заметим, что в математике определение зацепленности другое.)

31. (а) Если замкнутая ломаная в четырехмерном пространстве ограничивает (кусочно-линейный) диск, не пересекающий вложенную сферу, то ломаная и сфера не зацеплены.

(б) Если две многогранные самопересекающиеся сферы в четырехмерном пространстве пересекаются в конечном числе точек, вне самопересечений и трансверсально, то число точек их пересечения четно. (Дайте сами определение трансверсальности, чтобы его хватило для решения предыдущего пункта.)

32. (а) При любом вложении комплекса $L - (012)$ в \mathbb{R}^4 замкнутая ломаная 012 зацеплена со сферой $[3456]$.

(б) Комплекс $L - (012) - (013)$, получающийся из L удалением граней 012 и 013 , вложим в \mathbb{R}^4 , и при любом таком вложении

либо замкнутая ломаная $[012]$ зацеплена со сферой $[3456]$,

либо замкнутая ломаная $[013]$ зацеплена со сферой $[2456]$.

(с) Комплекс $L - (012) - (013) - (014)$, получающийся из L удалением граней 012, 013 и 014, вложим в \mathbb{R}^4 , и при любом таком вложении

- либо замкнутая ломаная [012] зацеплена со сферой [3456],
- либо замкнутая ломаная [013] зацеплена со сферой [2456],
- либо замкнутая ломаная [014] зацеплена со сферой [2356].

33. Пусть в четырехмерном пространстве даны 7 точек, любые две из которых соединены несамопересекающимися ломаными, и на любой цикл из трех ломаных натянут кусочно-линейно вложенный диск. Предположим, что ломаные пересекаются только если имеют общий конец, и только в этом конце. Тогда некоторый из натянутых дисков пересекает ‘дополнительную’ к нему сферу.

Основная идея для четырехмерного случая.

Четырехмерные кольца Борромео (решение задачи 29). Рассмотрим построенные ранее кольца Борромео в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим \mathbb{R}^3 как гиперплоскость в \mathbb{R}^4 . Построим две непересекающиеся сферы в \mathbb{R}^4 , которые пересекают гиперплоскость по первому и по второму из колец Борромео, соответственно. Эти две сферы вместе с третьим кольцом Борромео образуют четырехмерные кольца Борромео.

Лемма о кольцах Борромео. *В четырехмерном пространстве не существует вложенных попарно не пересекающихся сфер S_1, S_2 и тора, для которых*

- S_1 и параллель тора зацеплены; • S_2 и меридиан тора зацеплены;
- S_1 и меридиан тора не зацеплены; • S_2 и параллель тора не зацеплены.

Пояснение связи с кольцами Борромео. Если существуют, то S_1, S_2 и S образуют кольца Борромео. Но S можно стянуть с S_1 и S_2 по тору.

34. (1,3) Любые 3 из этих свойств могут выполняться одновременно.

Обозначим $K := L \cup [0u]$. Зададим комплекс Q_f той же формулой, что и P_f (с новым K).

35. (а) Если Q_f вложим в \mathbb{R}^4 , то существует \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$.

Указание. Аналогично трехмерному случаю. Вместо трехмерной леммы о кольцах Борромео используется четырехмерная, а вместо теоремы Конвея-Гордона-Закса — задача 32.

(b) Докажите частный случай основной теоремы.

Решения некоторых задач.

19а. Достаточно доказать, что если либо треугольники Δ и Δ' зацеплены, то контур треугольника Δ' пересекает плоскость треугольника Δ и контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' . Первое очевидно. Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' . Значит, и контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' .

19б. Обозначим через t высоту точки A_1 над горизонтальной плоскостью. Треугольники зацеплены для $t \in (-\infty; 2) \cup (3, 5; 4, 5) \cup (6; +\infty)$ и не зацеплены для $t \in (2; 3, 5) \cup (4, 5; 6)$. Это следует из зацепленности треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ из задачи 18а и следующей леммы (которая, в свою очередь, вытекает из задачи 21а).

Лемма о движении. *Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t , где $0 \leq t \leq 2$. Предположим, что b вершин треугольников Δ_t и Δ' находятся в общем положении при всех t , кроме $t = 1$.*

(а) Если $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, то пары (Δ_0, Δ') и (Δ_2, Δ') зацеплены или нет одновременно.

(b) Если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то ровно одна пара (Δ_0, Δ') и $k(\Delta_2, \Delta')$ является зацепленной.

20а. Зацепленность равна четности количества пересечений (неупорядоченных) пар несоседних отрезков, не содержащих вершины 1. Для доказательства преобразуйте сумму по

разбиениям в сумму по упорядоченным парам непересекающихся ребер, проекция первого из которых проходит *выше* проекции второго.

20b. Пусть наборы точек $N, X_1, X_2, X_3, X_4,$ и $X_5,$ а также $N', X_1, X_2, X_3, X_4,$ и X_5 находятся в общем положении. Соединим точки N и N' ломаной, не проходящей через отрезки X_iX_j . Будем равномерно двигать точку N вдоль этой ломаной, через N_t обозначим ее положение в момент времени t . По лемме о движении зацепленность шестерки точек $N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ может измениться лишь в те моменты времени, когда $N_t \in X_iX_jX_k$ для некоторых $1 \leq i < j < k \leq 5$. Поэтому достаточно доказать, что при прохождении точки N через плоскость $X_iX_jX_k$, зацепленность нашей шестерки не меняется (считаем, что $i = 1, j = 2, k = 3$). Среди всех возможных отрезков с концами в точках N, X_i, X_j, X_k либо вообще нет двух пересекающихся отрезков, либо имеется только одна пара пересекающихся отрезков.

В первом случае контуры любых двух пар треугольников с концами в точках $N, X_1, X_2, X_3, X_4,$ и X_5 не пересекаются; по лемме о движении зацепленность шестерки точек измениться не может.

Рассмотрим второй случай. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такая перестановка точек $N, X_1, X_2, X_3,$ что отрезок A_1A_2 пересекается с отрезком A_3A_4 . Существуют две пары треугольников с концами в точках $N, X_1, X_2, X_3, X_4,$ и $X_5,$ контуры которых пересекаются: $X_4A_1A_2$ и $X_5A_3A_4,$ $X_5A_1A_2$ и $X_4A_3A_4$. По лемме о движении зацепленность каждой из этих пар треугольников поменяется, а зацепленность остальных пар треугольников останется неизменным. Утверждение задачи доказано.

20c. Подходит набор точек из задачи 18a.

20d. Следует из предыдущих пунктов.

21a. Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ' .

Тогда выполнение условия (1) очевидно.

Выполнение условия (2) следует из задачи 19a. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ' , то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки.

Докажем теперь выполнение условия (3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и $B,$ а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B' . Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l .

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l . Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ' .

21b. Воспользуемся пунктом (a). Каждое из условий (1)-(3) сохраняется при допустимом движении. Неочевидно только сохранение условия (1), которое могло бы нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но тогда из задачи 19a следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него треугольники Δ и Δ' не зацеплены.

21c. Каждое из двух условий равносильно одному и тому же условию по пункту (a).