

Тропическая геометрия

М.Э.Казарян

Содержание

1	Тропическая прямая	2
2	Тропическое полуполе	5
3	Тропические многочлены и тропические кривые	5
4	Диаграмма Ньютона и её разбиение	8
5	Задача пересчета плоских алгебраических кривых	10
6	Тропическое вырождение комплексных кривых	12
7	Пересчет тропических кривых	15
8	Вещественные алгебраические кривые и склейка Виро	20
9	Пересчет вещественных нодальных кривых и инвариант Вельшенжера	24
10	Заключительные замечания	27

Аннотация

Двумерная комплексная геометрия изучает гладкие комплексные кривые на плоскости, заданные многочленом фиксированной степени. Топологические инварианты кривой не меняются при непрерывном изменении коэффициентов многочлена, пока кривая остается гладкой. Один из возможных способов изучения кривых состоит в том, чтобы рассмотреть предельные значения коэффициентов, при которых кривая становится особой. В некоторых случаях исследование особой кривой проще, и это дает информацию об исходной невырожденной кривой.

Тропическая геометрия — это способ решения задач комплексной геометрии при помощи «сверхвырождения» кривой, при котором она уже перестает быть, собственно говоря, комплексной, а описывается графом с прямыми ребрами на вещественной евклидовой плоскости. В результате задача

сводится к абсолютно элементарному комбинаторному исследованию полученных графов.

Благодаря большому количеству приложений, а также удачному громкому названию (не имеющему отношения к существу дела) тропическая геометрия приобрела большую популярность в последние годы.

В приведённых записках тропическая геометрия рассматривается на примере решения следующей задачи: найти количество комплексных кривых фиксированной степени на плоскости, имеющих заданное число двойных точек и проходящих через заданный набор точек общего положения.

1 Тропическая прямая

«Тропическая геометрия» появилась изначально в теории информации и получила свое название по месту работы бразильского профессора Имре Саймона, работавшего в этой области. В настоящее же время тропическая геометрия обычно упоминается в связи с её приложениями к алгебраической геометрии и к содержанию предмета её название отношения не имеет. Простейшим объектом тропической геометрии является *тропическая прямая*, изображённая на рис. 1. Это объединение трёх лучей на обычной вещественной плоскости, выходящих из

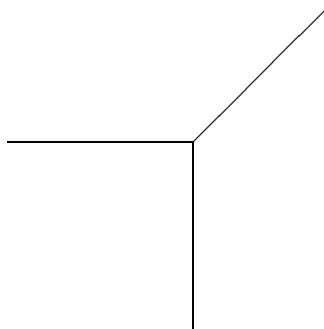


Рис. 1: Тропическая прямая

одной точки, один из которых направлен строго влево, другой строго вниз, а третий — вправо вверх под углом ровно 45° . Различные тропические прямые получаются друг из друга параллельным переносом. Таким образом, множество всех тропических прямых само образует пространство \mathbb{R}^2 . Термин «прямая» обосновывается следующими неожиданными, на первый взгляд, свойствами:

- любые две тропические прямые общего положения пересекаются в единственной точке;
- через любые две точки общего положения на плоскости проходит единственная тропическая прямая.

Условие общности положения важно, но не является слишком ограничительным. Рассмотрим какую-нибудь вырожденную конфигурацию, например, предположим, что заданные две точки находятся на одной горизонтальной прямой.

Пошевелив слегка эти две точки, мы получаем невырожденную конфигурацию, для которой проходящая через них прямая определена уже однозначно. Нетрудно заметить, что имеется единственное предельное положение этой прямой при стремлении пошевелённых точек к исходному положению (найдите его!). Таким образом, из всех тропических прямых, содержащих исходные две точки необщего положения, имеется одна, наиболее предпочтительная.

На первый взгляд, тропическая прямая мало чем напоминает обычную, к которой мы привыкли еще со школьной программы. В действительности же, тропическая прямая является своего рода бесконечным вырождением обычной (правда, комплексной) прямой, так что приведённые выше свойства являются следствиями соответствующих свойств прямых в классической геометрии. К описанию связи тропической геометрии с классической мы и перейдем.

Рассмотрим обычную комплексную плоскость \mathbb{C}^2 с комплексными координатами X, Y (строчные буквы x, y мы зарезервируем для обозначения вещественных координат на вещественной тропической плоскости \mathbb{R}^2). Рассмотрим пару точек P_1 и P_2 с координатами (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) , соответственно, и прямую L , проходящую через эти две точки. Эта прямая задается линейным уравнением

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1}.$$

Нас интересуют комплексные решения этого уравнения. Всякое комплексное число X представимо в виде $X = \varphi r$, где φ — комплексное число единичной длины, называемое *фазой*, а $r \geq 0$ — вещественное число, называемое *амплитудой*. Предположив, что $r > 0$, мы можем положить $r = t^x$, где $t > 1$ — фиксированное вещественное число и $x \in \mathbb{R}$. В соответствии с этим, положим $P_i = (\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$, $|\varphi_i| = |\psi_i| = 1$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$. Тогда уравнение прямой L принимает вид

$$A X + B Y + C = 0, \tag{1}$$

где, скажем, $A = 1/(X_2 - X_1) = 1/(\varphi_2 t^{x_2} - \varphi_1 t^{x_1})$, и аналогично для коэффициентов B и C . Предположим теперь, что фазы φ_i, ψ_i и показатели амплитуд x_i, y_i точек P_1 и P_2 фиксированы, а величина t меняется. В результате мы получаем семейство прямых $L(t)$, зависящих от вещественного параметра t .

Нас интересует поведение этих прямых при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что коэффициент $A = A(t)$ уравнения для кривой $L(t)$ ведет себя при больших t как степенная функция вида $\text{const } t^\alpha$. Действительно, при $x_2 > x_1$ мы имеем

$$A(t) = \frac{t^{-x_2}}{\varphi_2 - \varphi_1 t^{x_1 - x_2}} \sim \frac{1}{\varphi_1} t^{-x_2},$$

поскольку $t^{x_2 - x_1} \rightarrow 0$. Поэтому в данном случае мы получаем $\alpha = -x_2$. В случае $x_2 < x_1$ мы имеем аналогичное представление с $\alpha = -x_1$. Аналогичные вычисления приводят к асимптотическим разложениям вида $B \sim \text{const } t^\beta$, $C \sim \text{const } t^\gamma$. Положив, также, $X = \varphi t^x$, $Y = \psi t^y$, где $|\varphi| = |\psi| = 1$, мы можем приближённо переписать левую часть равенства (1) в виде

$$a t^{x+\alpha} + b t^{y+\beta} + c t^\gamma,$$

где комплексные числа a, b, c , хотя и содержат неизвестные фазы φ и ψ , являются отличными от нуля и ограниченными константой, не зависящей от t . Если показатели $x + \alpha$, $y + \beta$, и γ все различны, то из трёх мономов, участвующих в последнем выражении, один существенно преобладает над другими, так что выражение никак не может обратиться в ноль. Следовательно, для того, чтобы точка $(\varphi t^x, \psi t^y)$ являлась решением уравнения (1), необходимо, чтобы максимум из трёх чисел $x + \alpha, y + \beta, \gamma$ достигался по крайней мере в двух из них. Нетрудно видеть, что множество пар (x, y) , в которых выполняется это условие, является тропической прямой, а именно, множеством негладкости кусочно-линейной функции

$$f(x, y) = \max(x + \alpha, y + \beta, \gamma).$$

Более формально, сделанный вывод можно сформулировать следующим образом. Положим $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и рассмотрим отображение

$$\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданное в координатах в виде $(X, Y) \mapsto (x, y)$, $x = \log_t |X|$, $y = \log_t |Y|$.

Предложение. *Образ прямой $L(t)$ при отображении Log_t содержится при больших t в ε -окрестности некоторой тропической прямой. Размер ε этой окрестности тем меньше, чем больше t , и при $t \rightarrow \infty$ величина ε стремится к нулю.*

Таким образом, тропическую прямую можно рассматривать как вырождение комплексной прямой $L(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Образ комплексной прямой при отображении Log_t называется её *амёбой*. Амёба, вместе с содержащейся в ней тропической прямой, изображена на рис. 2. Внутренние точки амёбы имеют по два прообра-

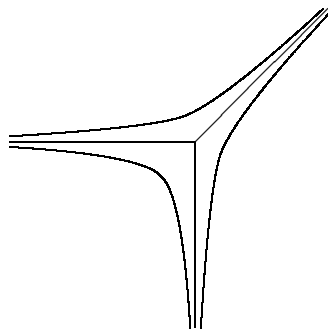


Рис. 2: Амёба комплексной прямой

за на комплексной прямой, граничные — по одному. Саму комплексную прямую можно представлять себе как результат склейки двух экземпляров амёбы вдоль общей границы. Результат такой склейки (иногда называющийся также *штанамми*) топологически эквивалентен двумерной сфере без трёх точек. Три выколотые точки, соответствующие «щупальцам» амёбы, отвечают двум точкам пересечения прямой $L(t)$ с координатными осями, а также точке $\infty \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.

2 Тропическое полуполе

Другой, более алгебраический, взгляд на тропическую геометрию, состоит в следующем. Рассмотрим множество \mathbb{R} вещественных чисел и введём на нём модифицированные операции сложения и умножения следующим образом:

$$\begin{aligned} "x \times_t y" &= \log_t(t^x t^y) = x + y, \\ "x +_t y" &= \log_t(t^x + t^y), \end{aligned}$$

где $t > 1$ — параметр. Очевидно, что так введённые операции совпадают с обычным умножением и сложением на полупрямой $\mathbb{R}_{>0}$ при отождествлении $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, задаваемом соответствием $x \mapsto t^x$. Оказывается, что эти операции допускают предел при $t \rightarrow \infty$. Действительно, введённое умножение от t вообще не зависит, а для сложения заметим, что из двух слагаемых под знаком логарифма при больших t существенным является вклад только того из них, у которого показатель больше. В результате мы получаем предельные операции (в обозначении которых мы индекс опускаем)

$$\begin{aligned} "x \times y" &= x + y, \\ "x + y" &= \max(x, y). \end{aligned}$$

Множество вещественных чисел с введёнными двумя операциями называется *тропическим полуполем*. Обе операции коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют обычному свойству дистрибутивности. Эти свойства вытекают из того, что они выполняются до взятия предела. Конечно, их легко установить и непосредственно из определения. В тропическом полуполе отсутствует аддитивный ноль. Его роль играет $-\infty$. Тропическое частное " x/y " $= x - y$ определено без ограничения на знаменатель y , а тропическая разность не определена вовсе. Поэтому и используется термин *полуполе*.

3 Тропические многочлены и тропические кривые

Определение. *Тропическим многочленом степени d* называется кусочно-линейная функция

$$f(x, y) = " \sum_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j " = \max_{i+j \leq d} (i x + j y + \alpha_{i,j}),$$

где $\alpha_{i,j}$ — вещественные константы.

Может случиться так, что для некоторого из мономов " $\alpha_{i,j} x^i y^j$ " $= i x + j y + \alpha_{i,j}$ значение функции не совпадает со значением этого монома ни в одной точке. В этом случае малое изменение коэффициента $\alpha_{i,j}$ не меняет многочлена. Иными

словами, мы рассматриваем тропический многочлен не как набор коэффициентов $\alpha_{i,j}$, а именно как саму кусочно-линейную функцию. Пространство тропических многочленов можно отождествить с (замкнутым) конусом в пространстве коэффициентов $\alpha_{i,j}$. Еще одно важное замечание заключается в том, что тропический многочлен степени d не является частным случаем тропического многочлена степени d' при $d < d'$. Иными словами, степень d входит в определение многочлена.

Пример. Тропическая линейная функция

$$f(x, y) = \max(x + \alpha, y + \beta, \gamma)$$

имеет следующее поведение (см. рис. 3). При x и y отрицательных и больших

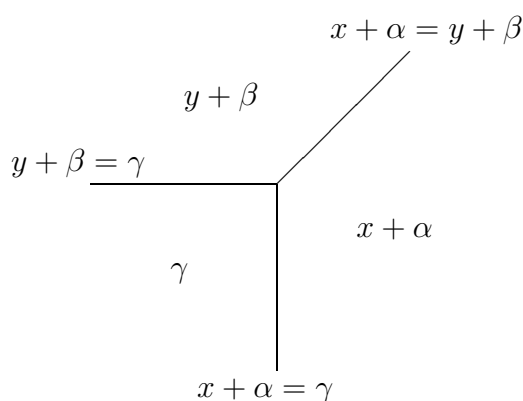


Рис. 3: Тропическая линейная функция

по абсолютной величине максимальным из трёх величин является постоянное значение γ . При увеличении x значение функции не меняется до тех пор, пока точка (x, y) не пересечет вертикальную прямую $x + \alpha = \gamma$. Правее этой прямой максимальной является ветвь $x + \alpha$. Аналогично, при движении точки (x, y) вверх переход к ветви $y + \beta$ осуществляется на горизонтальной прямой $y + \beta = \gamma$, вдоль которой максимум достигается на двух конкурирующих ветвях $y + \beta$ и γ . Наконец, области, в которых значение функции $f(x, y)$ совпадает с ветвями $x + \alpha$ и $y + \beta$, разделяются лучом прямой $x + \alpha = y + \beta$, имеющей наклон 1. Таким образом, множеством негладкости линейной тропической функции служит тропическая прямая, рассмотренная в предыдущем пункте.

Пример. Рассмотрим тропические многочлены второй степени. Множество негладкости такого многочлена называется *тропической кривой второй степени*, служащей тропическим аналогом эллипса и гиперболы из классической геометрии. Как и для обычной гиперболы, тропическую кривую второй степени можно получить, пошевелив слегка объединение двух тропических прямых. Объединение двух прямых задается произведением (в тропическом смысле) двух линейных функций. У графа, являющегося множеством негладкости такого произведения, имеется вершина валентности 4, в которой максимум достигается одновременно на четырёх конкурирующих линейных функциях. После небольшого

шевеления одной из этих линейных функций точка валентности четыре распадается на две точки валентности три. Некоторые из возможных тропических кривых второй степени приведены на рис. 4.

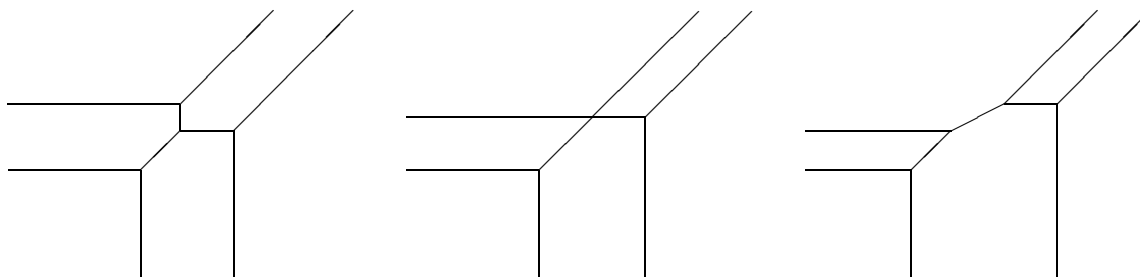


Рис. 4: Вырожденная тропическая кривая второй степени и два её шевеления

Задача. Определите наклон каждого из рёбер тропических кривых, изображённых на рисунке. Найдите все возможные конфигурации тропических кривых второй степени общего положения (под конфигурацией я понимаю комбинаторный тип графа и наклон его рёбер, но не их длины и положение).

Рассмотрим один из отрезков множества негладкости тропического многочлена. Предположим, что в одной из областей, граничащих с этим отрезком, максимальной является ветвь $i x + j y + \alpha_{i,j}$, а другой — ветвь $\hat{i} x + \hat{j} y + \alpha_{\hat{i},\hat{j}}$. Тогда прямая, содержащая данный отрезок, задается уравнением

$$(i - \hat{i}) x + (j - \hat{j}) y + (\alpha_{i,j} - \alpha_{\hat{i},\hat{j}}) = 0.$$

Назовём *кратностью* отрезка множества негладкости наибольший общий делитель чисел $i - \hat{i}$ и $j - \hat{j}$.

Определение. *Тропической кривой*, ассоциированной с данным тропическим многочленом, называется граф на тропической плоскости, являющийся множеством негладкости этого многочлена, и снабжённый кратностями всех его рёбер.

Кратные ребра тропической кривой обозначают на рисунках обычно двойными (тройными и т.д.) линиями.

Лемма. *Тропические кривые, ассоциированные с многочленами степени d , обладают следующими свойствами.*

1. Наклон каждого ребра рационален.
2. В каждой вершине выполняется следующее условие сбалансированности. Обозначим через v_i вектор с началом в данной вершине, имеющий направление i -го ребра, выходящего из вершины, и равный кратчайшему целочисленному вектору с данным направлением, умноженному на кратность ребра. Тогда

$$\sum v_i = 0.$$

3. Имеется $3d$ бесконечных рёбер, взятых с учетом кратностей, d их которых направлены строго влево, d направлены строго вниз, и d направлены вправо вверх с углом наклона 1.

Первое свойство очевидно. Докажем второе. Рассмотрим вершину кривой и предположим, что к этой вершине подходит r областей дополнения к кривой, в которых максимум достигается на функциях $i_1x + j_1y + \alpha_{i_1, j_1}, \dots, i_rx + j_ry + \alpha_{i_r, j_r}$, соответственно (мы считаем области занумерованными против часовой стрелки). Тогда, очевидно, выполняется векторное равенство

$$\begin{pmatrix} i_2 - i_1 \\ j_2 - j_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} i_r - i_{r-1} \\ j_r - j_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 - i_r \\ j_1 - j_r \end{pmatrix} = 0.$$

Осталось заметить только, что вектор $\begin{pmatrix} i_{s+1} - i_s \\ j_{s+1} - j_s \end{pmatrix}$ отличается от вектора v_s , участвующего в условии сбалансированности, только лишь поворотом на 90° .

Доказательство третьего свойства оставляется в качестве упражнения. Его наглядный смысл будет разъяснён в следующем пункте.

Теорема. *Тропический многочлен восстанавливается по своей кривой однозначно с точностью до аддитивной (то есть тропически мультипликативной) константы. Более того, всякий граф на плоскости с прямыми ребрами и предписанными кратностями, удовлетворяющий свойствам 1–3 предыдущей леммы, является тропической кривой, ассоциированной с некоторым многочленом степени d .*

Действительно, предположим, что в некоторой области тропический многочлен совпадает с линейной функцией $ix + jy + \alpha_{i,j}$. Пусть прямая, содержащая отрезок границы этой области, имеет уравнение $px + qy + \beta = 0$. Тогда в соседней области, граничащей с исходной вдоль отрезка, многочлен совпадает с линейной функцией $(i+p)x + (j+q)y + (\alpha_{i,j} + \beta)$. Иными словами, мы устанавливаем равенство $\alpha_{i+p, j+q} = \alpha_{i,j} + \beta$. Продолжая таким же образом, мы восстанавливаем весь многочлен область за областью по индукции. Условие сбалансированности гарантирует нам, что в процессе построения мы никогда не придём к противоречию. Условие поведения тропической кривой на бесконечности обеспечит наличие только тех «тропических мономов», полученных в процессе построения, которые только и возможны для многочленов данной степени.

Приведённая теорема показывает, что всякая попытка определить «абстрактную» тропическую кривую приводит неизбежно к кривой, связанной с некоторым многочленом.

4 Диаграмма Ньютона и её разбиение

Мономы $\alpha_{i,j}x^i y^j$, встречающиеся у многочленов степени d , нумеруются целыми точками на плоскости с координатами i, j , лежащими внутри треугольника Δ с вершинами $(0, 0)$, $(d, 0)$ и $(0, d)$. Этот треугольник называется *диаграммой*

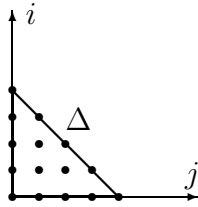


Рис. 5: Диаграмма Ньютона

Ньютона (см. рис. 5). Со всякой тропической кривой связывается некоторое разбиение диаграммы Ньютона на выпуклые многоугольники с целочисленными вершинами. Это разбиение двойственно разбиению тропической плоскости, задаваемому тропической кривой. А именно, рассмотрим область дополнения тропической кривой, в которой многочлен совпадает с тропическим мономом “ $\alpha_{i,j}x^i y^j$ ” = $i x + j y + \alpha_{i,j}$. Этой области мы сопоставим вершину с координатами (i, j) на диаграмме Ньютона. Ребру тропической кривой, разделяющему две области, сопоставляется отрезок на диаграмме Ньютона, соединяющий вершины, отвечающие этим двум областям. Наконец, всякой вершине тропической кривой, к которой подходит r областей её дополнения, соответствует r -угольник на диаграмме Ньютона, вершины которого отвечают этим r областям. В частности, бесконечным областям соответствуют вершины разбиения, входящие в границу Δ , а бесконечным ребрам — отрезки границы Δ (см. рис. 6). Полезно отметить, что направление всякого ребра тропической кривой ортогонально направлению двойственного ребра разбиения Δ .

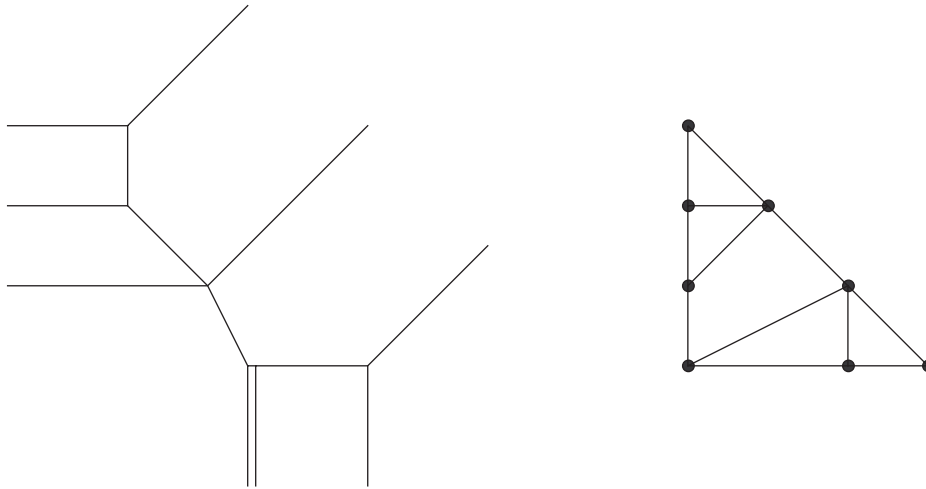


Рис. 6: Тропическая кривая и соответствующее ей разбиение диаграммы Ньютона

Вот еще одно эквивалентное описание разбиения диаграммы Ньютона. Рассмотрим в трёхмерном пространстве с координатами (i, j, z) набор лучей $z \leq \alpha_{i,j}$, где пары (i, j) пробегает целочисленные точки диаграммы Ньютона. Рассмот-

рим многогранную область, являющуюся выпуклой оболочкой этого набора лучей. Построенная область задается неравенством $z \leq g(i, j)$, $(i, j) \in \Delta$ (в котором координаты (i, j) уже не предполагаются целочисленными), для некоторой кусочно-линейной функции g . Эквивалентное определение функции g состоит в том, что она является *преобразованием Лежандра* исходной функции f :

$$g(i, j) = \min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (f(x, y) - i x - j y).$$

Так вот, утверждение состоит в том, что *описанное выше разбиение треугольника Δ совпадает с его разбиением на области гладкости функции g* .

Отметим, что форма тропической кривой (комбинаторный тип графа, направления и кратности рёбер) несет в себе ровно столько же информации, сколько содержится в двойственном разбиении диаграммы Ньютона. В зависимости от ситуации, удобнее бывает пользоваться либо одним, либо вторым описанием. Например, кратность ребра тропической кривой равна количеству отрезков, на которые делят целые точки двойственное ребро разбиения Δ , и т.д.

Пример. Имеется ровно 4 разбиения диаграммы Ньютона при $d = 2$ на треугольники минимально возможной площади $1/2$. Эти разбиения изображены на рисунке 7. Тропические кривые, соответствующие этим разбиениям, имеют толь-

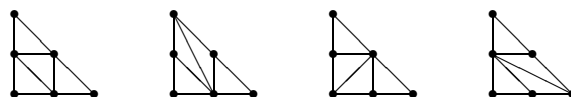


Рис. 7: Различные разбиения диаграммы Ньютона ($d = 2$)

ко простые ребра (кратности 1) и вершины валентности 3. Кривые, соответствующие первым двум разбиениям, изображены на крайне левом и крайне правом рис. 4.

Задача. Как выглядят тропические кривые, соответствующие оставшимся двум разбиениям, изображённым на рисунке 7? Какое разбиение соответствует средней кривой рисунка 4?

5 Задача пересчёта плоских алгебраических кривых

Одно из самых ярких применений тропической геометрии состоит в решении задачи пересчёта плоских комплексных кривых. Приведём постановку этой задачи.

Комплексная кривая степени d на комплексной плоскости задается многочленом степени d от двух переменных. Количество коэффициентов этого многочлена равно числу точек на диаграмме Ньютона, то есть $(d + 1)(d + 2)/2$. Количество комплексных параметров, необходимых для задания кривой, на один меньше,

поскольку многочлен определён с точностью до умножения на константу. Кроме того, мы будем рассматривать *нодальные* кривые, то есть кривые с двойными точками (самопересечениями). Самопересечение появляется, например, в семействе гипербол $XY = \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условие наличия особой точки уменьшает на один количество свободных параметров, необходимых для задания кривой (то есть является условием коразмерности один). В результате, семейство кривых степени d с n двойными точками имеет размерность

$$c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1,$$

иными словами, кривые этого семейства зависят локально от $c(d, n)$ комплексных параметров. Отсюда следует, что для $c(d, n)$ точек общего положения на плоскости имеется лишь конечное число кривых семейства, проходящих через эти точки. Обозначим это число через $N_{d,n}$. Из общих принципов комплексной геометрии следует, что это число не зависит от выбора точек (при условии, что они общего положения). Наша задача состоит в его вычислении.

Пример. $N_{d,0} = 1$. Действительно, условие прохождения кривой через заданную точку задаёт *линейное* уравнение на коэффициенты многочлена. Для точек общего положения полученная линейная система уравнений невырождена, и из курса линейной алгебры следует, что у неё имеется единственное решение.

Пример. $N_{2,1} = 3$. Действительно, нодальная кривая степени 2 — это объединение двух прямых. Две прямые можно провести через $c(2, 1) = 4$ точек тремя способами, в соответствии с тремя способами разбиения четырёх точек на две пары.

Задача. Найдите $N_{3,2}$ и $N_{3,3}$.

Среди нодальных кривых, проходящих через заданные точки, могут быть как неприводимые, так и приводимые (представимые в виде объединения кривых меньших степеней). Обозначим через $\bar{N}_{d,n}$ количество тех из них, которые являются неприводимыми. Как показывает решение последней задачи, переход от $\bar{N}_{d,n}$ к $N_{d,n}$ и обратно осуществляется несложным комбинаторным пересчетом. Значения чисел $N_{d,n}$ и $\bar{N}_{d,n}$ для небольших d и n приведены в следующей таблице (пропущенные числа означают нули).

$N_{d,n} :$	$d \backslash n$	2	3	4	5		$\bar{N}_{d,n} :$	$d \backslash n$	2	3	4	5
	0	1	1	1	1			0	1	1	1	1
	1	3	12	27	48			1	12	27	48	
	2	21	225	882				2	225	882		
	3	15	675	7915				3	620	7915		
	4		666	36975				4		36855		
	5		378	90027				5		87192		
6		105	109781		6		87304					

Способ нахождения этих чисел при помощи тропической геометрии описан в следующем пункте.

Замечание. Пусть задана неприводимая нодальная кривая степени d с n двойными точками. Рассмотрим её замыкание на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, получаемое добавлением d точек «на бесконечности». После этого, «разъединив» ветви кривой в двойных точках, мы получим уже гладкую компактную комплексную кривую, то есть гладкую вещественную ориентированную поверхность, иными словами, сферу с ручками. Род g этой поверхности, то есть число ручек, вычисляется по формуле Римана-Гурвица:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n.$$

Размерность пространства неприводимых нодальных кривых рода g и степени d равна

$$c(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g) = 3d - 1 + g.$$

Род неотрицателен, в частности, $\bar{N}_{d,n} = 0$ при $n > \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

6 Тропическое вырождение комплексных кривых

Метод тропической геометрии для решения задачи предыдущего пункта состоит в том, чтобы выбрать $c(d, n)$ точек на плоскости специальным образом. А именно, выберем эти точки в виде $P_i = (\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$, где $|\varphi_i| = |\psi_i| = 1$, а $p_i = (x_i, y_i)$ — фиксированные точки на тропической плоскости. Конечно, для всякого конечного t любой набор точек на плоскости представим в указанном виде. Идея состоит в том, чтобы проследить за поведением искомым $N_{d,n}$ кривых при $t \rightarrow \infty$ для фиксированных φ_i, ψ_i, x_i и y_i .

Можно показать, аналогично тому, как мы это делали в случае прямых, что каждая из искомым $N_{d,n}$ кривых задается уравнением вида

$$\sum_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} A_{i,j}(t) X^i Y^j = 0,$$

где зависящий от t коэффициент $A_{i,j}$ имеет при больших t разложение вида $A_{i,j}(t) = \text{const } t^{\alpha_{i,j}} + o(t^{\alpha_{i,j}})$. Подставив в левую часть уравнения координаты точки $(X, Y) = (\varphi t^x, \psi t^y)$, мы получаем приближённое выражение вида

$$\sum_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} a_{i,j} t^{i x + j y + \alpha_{i,j}}.$$

Как и в случае прямых, мы заключаем, что внутри каждой из областей дополнения к тропической кривой, отвечающей тропическому многочлену $\max(i x + j y + \alpha_{i,j})$, один из мономов исходного многочлена преобладает над остальными, и этот многочлен может обратиться в ноль только в том случае, если точка (x, y)

тропической плоскости находится вблизи тропической кривой. Иными словами, образ изучаемой комплексной кривой при отображении

$$\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (X, Y) \mapsto (\log_t |X|, \log_t |Y|),$$

лежит в узкой окрестности тропической кривой, и размер этой окрестности стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. По построению, предельная тропическая кривая проходит через точки $p_i = \text{Log}_t P_i$, однако какая именно тропическая кривая получается в пределе, зависит от выбора комплексной кривой.

Детальный анализ этой ситуации, который мы опускаем, поскольку он достаточно сложен и техничен, позволяет определить, какому вырождению тропической кривой соответствует условие нодалности комплексных кривых, а также каково количество комплексных кривых построенного семейства, сходящихся к каждой из возможных тропических кривых.

Определение. *Нодалной тропической кривой* называется тропическая кривая, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Кривая имеет только вершины валентности три и четыре, причём в четырёхвалентных вершинах противоположные ребра имеют одинаковое направление (как у трансверсального пересечения двух отрезков прямых).
2. Все бесконечные ребра имеют кратность 1.

Числом виртуальных двойных точек $n(\Gamma)$ нодалной тропической кривой Γ называется сумма числа её четырёхвалентных вершин и числа «отсутствующих областей», то есть пар индексов (i, j) диаграммы Ньютона, которым не соответствует ни одна область дополнения к тропической кривой. Число отсутствующих областей можно вычислить также как разницу «ожидаемого» числа ограниченных областей, равного числу внутренних целых точек диаграммы Ньютона, то есть $(d-1)(d-2)/2$, и реального числа ограниченных областей дополнения тропической кривой.

Кратностью μ трёхвалентной вершины тропической кривой называется площадь параллелограмма, натянутого на любые два из трёх векторов v_1, v_2, v_3 , участвующих в условии сбалансированности вершины из леммы на стр. 7. Равенство площадей всех трёх параллелограммов вытекает из условия сбалансированности $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Кратностью $m(\Gamma)$ нодалной тропической кривой называется произведение кратностей всех её трёхвалентных вершин.

На двойственном языке диаграмм Ньютона нодалность тропической кривой означает, что в соответствующем ей разбиении треугольника Δ участвуют только треугольники и параллелограммы, причём все граничные целочисленные точки треугольника Δ участвуют в разбиении. $n(\Gamma)$ равно сумме числа параллелограммов и числа (внутренних) целых точек в Δ , не являющихся вершинами разбиения; $m(\Gamma)$ равно произведению удвоенных площадей всех треугольников разбиения.

Каждое из двух вырождений, участвующих в определении виртуального числа двойных точек, является условием вещественной коразмерности 1. Поэтому нодальные тропические кривые степени d с n виртуальными двойными точками образуют открытую многогранную область в вещественном векторном пространстве вещественной размерности $c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1$. Отсюда следует, что для общего выбора $c(d, n)$ точек на тропической плоскости существует лишь конечное число проходящих через них нодальных тропических прямых Γ степени d , таких что $n(\Gamma) = n$.

Зафиксируем $c(d, n)$ точек (x_i, y_i) общего положения на тропической плоскости, а также соответствующий набор фаз (φ_i, ψ_i) . Рассмотрим семейство $N_{d,n}$ комплексных кривых, проходящих через точки $(\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$ комплексной плоскости и зависящих от вещественного параметра $t \gg 0$.

Теорема. *Образ при отображении Log_t каждой из $N_{d,n}$ комплексных кривых, проходящих через точки $(\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i})$, стремится к одной из нодальных тропических кривых, проходящих через точки (x_i, y_i) тропической плоскости. Предельная тропическая кривая имеет n виртуальных двойных точек, и число комплексных кривых семейства, аппроксимирующих данную тропическую кривую, равно её кратности.*

Следствие. *Количество нодальных тропических кривых степени d , имеющих n виртуальных двойных точек, проходящих через $c(d, n)$ точек общего положения на тропической плоскости и подсчитанных с учетом кратностей, не зависит от выбора этих точек (при условии, что они общего положения), и равно $N_{d,n}$.*

Для первого утверждения следствия можно привести прямое комбинаторное доказательство, не использующее привлечения средств комплексной геометрии. Нужно перечислить все возможные перестройки наборов тропических кривых при движении отмеченных точек, и убедиться, что при каждой из возможных перестроек скачок инварианта равен нулю. Это утверждение вовсе не очевидно, как показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим изображённый на левой части рисунка 8 фрагмент тропической кривой, проходящей через заданные отмеченные точки. При движении навстречу друг другу нижних двух отмеченных точек двойной отрезок тропической кривой укорачивается, и в некоторый момент происходит перестройка. После перестройки конфигурации отмеченных точек соответствует два возможных фрагмента нодальных кривых, изображённые в правой части рисунка. Отметим, что на одной из кривых, появившихся после перестройки, появляется новая двойная точка, что компенсируется возникновением новой ограниченной области. Кратность кривой до перестройки равна четырём, а кратности двух кривых, появившихся в результате перестройки, равны трём и одному, соответственно.

Задача. Выберите каким-нибудь способом $c(3, 1) = 8$ точек на тропической плоскости и постарайтесь перечислить все проходящие через них тропические

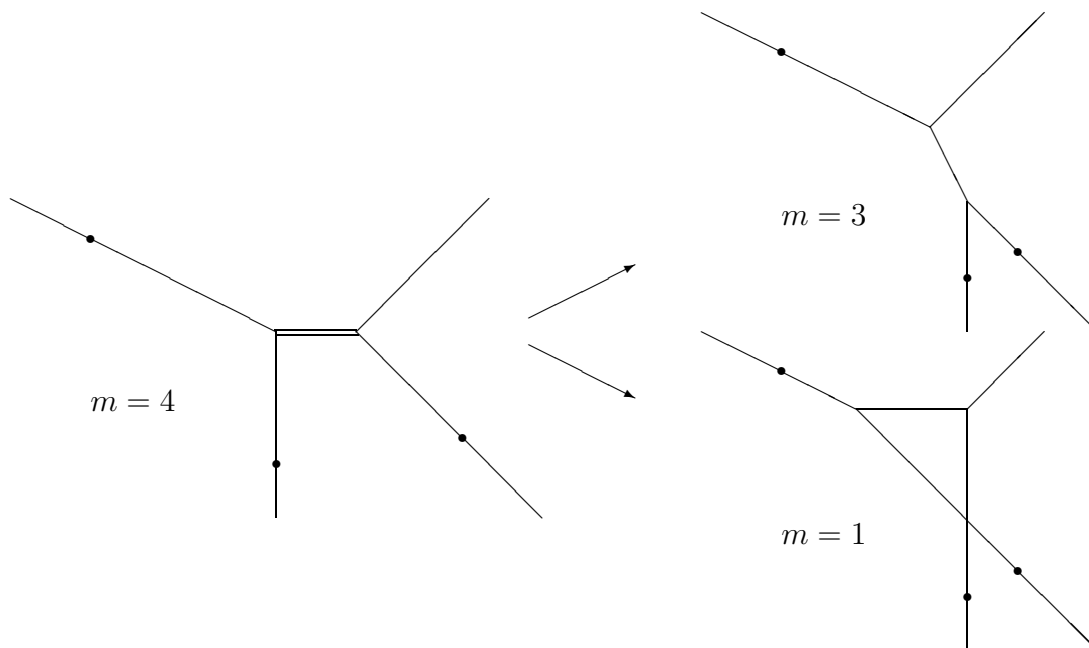


Рис. 8: Перестройка тропической нодальной кривой

кривые степени 3 с одной виртуальной двойной точкой. Чему равно значение инварианта $N_{3,1}$?

Имеется еще одна полезная интерпретация теоремы о тропическом вырождении. Положим $M = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ и рассмотрим изоморфизм $M \simeq (\mathbb{C}^*)^2$, задаваемый равенствами $X = \varphi t^x$, $Y = \psi t^y$, где $(\varphi, \psi) \in S^1 \times S^1$ и $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. При этом изоморфизме прообразы в M точек, через которые проводятся кривые, не зависят от t . Кроме того, при этом изоморфизме отображению Log_t соответствует проекция пространства M на сомножитель \mathbb{R}^2 (в частности, эта проекция также не зависит от t). Поэтому можно считать, что мы проводим комплексные кривые через фиксированный набор точек пространства M . Ни пространство, ни положение точек не зависят от t , а зависит от t только лишь комплексная структура на этом пространстве, то есть способ, которым мы его отождествляем с $(\mathbb{C}^*)^2$. Всякая комплексная кривая является вещественно двумерной поверхностью, и условие на поверхность являться комплексной существенно зависит от выбора комплексной структуры. Таким образом, тропическую кривую можно рассматривать также как предел семейства комплексных кривых при вырождении комплексной структуры.

7 Перечисление тропических кривых

Теорема предыдущего пункта сводит задачу вычисления чисел $N_{d,n}$ к перечислению нодальных тропических кривых, проходящих через заданные точки тропической плоскости. Последняя задача, хотя и является комбинаторной и абсолютно элементарной, все же требует решения. Ряд приёмов, сформулированных

в этом параграфе, делает вычисление инвариантов $N_{d,n}$ уже абсолютно автоматизированным.

Пусть задана тропическая нодальная кривая Γ . Рассмотрим семейство параллельных прямых (в обычном смысле) ℓ_t , заданных линейным уравнением $y = \alpha x + t$ с иррациональным наклоном α и проследим за перестройками множества точек пересечения тропической кривой с прямыми семейства. Очевидно, что при изменении параметра t семейства возможны в принципе следующие перестройки.

- Два ребра кривой Γ соединяются, образуя одно ребро. Угол наклона образованного ребра и его кратность однозначно определяется углами наклона соединяющихся ребер по условию сбалансированности.
- Перестройка, обратная предыдущей: ребро тропической кривой раздваивается, образуя два новых.
- Два ребра кривой Γ пересекаются, не меняя направлений и кратностей.

Предположим теперь, что все $s(d, n)$ точек тропической плоскости, через которые мы проводим тропические кривые, лежат на прямой $\ell(0)$. Тогда оказывается, что для проходящей через них нодальной тропической кривой имеются дополнительные ограничения.

Предложение. 1. *Предположим, что нодальная тропическая кривая Γ степени d с n виртуальными двойными точками пересекает прямую ℓ_0 в $s(d, n)$ заданных точках. Тогда*

- *В пересечении $\Gamma \cap \ell_0$ нет других точек, отличных от заданных.*
- *При монотонном изменении параметра t от 0 к $+\infty$ (соответственно, к $-\infty$) возможны лишь первая и третья перестройки, а вторая (рождение пары ребер) не реализуется.*

2. *Всякая тропическая нодальная кривая, проходящая через $s(d, n)$ различных точек прямой ℓ_0 и удовлетворяющая условиям предыдущего утверждения автоматически имеет ровно n виртуальных двойных точек.*

Сформулированное предложение вытекает из подсчёта числа параметров. Действительно, пространство тропических кривых с n виртуальными двойными точками $s(d, n)$ -мерно. Следовательно, выбор положения заданных $s(d, n)$ точек на прямой ℓ фиксирует проходящую через них тропическую кривую и эта кривая не допускает малых шевелений. Но если на прямой ℓ_0 имеются другие точки, то, изменив слегка их положение мы можем повторить ту же последовательность перестроек для близких значений параметра t и получить близкую тропическую кривую, проходящую через тот же набор заданных точек, что невозможно. Аналогично, если среди перестроек встречаются перестройки второго типа (раздвоение ребра), то момент совершения этой перестройки можно было бы слегка изменить, что опять привело бы к деформации исходной тропической кривой.

Второе утверждение вытекает из аналогичных соображений. Пусть задана тропическая прямая, удовлетворяющая условиям первого утверждения предложения. Тогда всякая близкая к ней тропическая кривая имеющая тот же комбинаторный тип имеет близкое положение точек пересечения с прямой ℓ_0 . И обратно, изменив слегка положение точек пересечения кривой с прямой ℓ_0 и проделав ту же последовательность перестроек для близких значений параметра t мы можем получить близкую к исходной тропическую кривую. Более того, моменты перестроек определяются положением исходных точек на прямой ℓ_0 однозначно. Следовательно, пространство шевелений исходной кривой, при которых не меняется ее количество виртуальных двойных точек, имеет размерность ровно $c(d, n)$. А значит, кривая имеет n виртуальных двойных точек.

Обозначим через Γ^+ (соответственно, Γ^-) пересечение кривой Γ с полуплоскостью, расположенной выше (соответственно, ниже) прямой ℓ_0 . С учетом приведенного предложения построение частей Γ^\pm искомым тропическим кривых сводится к следующему. Выберем некоторым образом направления ребер кривой в отмеченных точках прямой ℓ и обозначим этот выбор через P . Затем, увеличивая значение параметра t мы однозначно восстанавливаем положение точек на прямой ℓ_t до тех пор, пока какие-либо две точки не слились. В этот момент нужно совершить одну из двух разрешенных перестроек: либо две слившихся точки продолжают движение с неизменными направлениями, либо вместо них на прямой ℓ_t проявляется одна точка строящейся тропической кривой с однозначно определенным направлением содержащего ее ребра. Продолжая таким же образом, мы после конечного числа перестроек получаем окончательную конфигурацию, после которой перестроек уже не происходит. Эта окончательная конфигурация задает направления бесконечных ребер строящейся тропической кривой. Если эти направления получились такими, как и положено для тропических кривых степени d , то наше построение кривой Γ^+ увенчалось успехом (см. левую часть рис. 9). Если же направления бесконечных ребер оказались неправильными, то необходимо внести изменения в последовательность типов совершенных перестроек.

Построение части Γ^- тропической кривой проводится аналогично и независимо от выбора уже построенной части Γ^+ кривой.

Вклад частей Γ^\pm в кратность получаемых кривых также можно вычислять независимо. Обозначим через $m(\Gamma^\pm)$ произведение кратностей трёхвалентных вершин соответствующих частей кривой Γ . Тогда, по определению, $m(\Gamma) = m(\Gamma^-)m(\Gamma^+)$. Более того, для заданной конфигурации P направлений ребер в отмеченных точках прямой ℓ_0 обозначим через $m^+(P)$ (соответственно, $m^-(P)$) произведение кратностей кривых Γ^+ (соответственно, Γ^-) по всевозможным выборам построенной части кривой в полуплоскости, расположенной выше (соответственно, ниже) прямой ℓ_0 . Тогда мы получаем равенство

$$N_{d,n} = \sum_P m^-(P)m^+(P), \quad (2)$$

где суммирование проводится по всевозможным выборам конфигураций P , для которых множество соответствующих тропических кривых непусто.

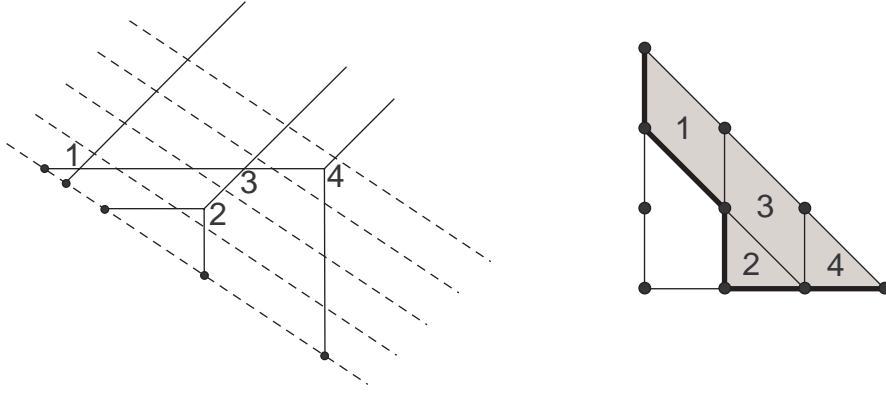


Рис. 9: Перестройки множества уровня линейной функции на тропической кривой и соответствующие им перестройки пути на диаграмме Ньютона

Процесс построения тропических кривых можно сделать еще более однозначным, если выбрать положение точек на прямой ℓ_0 подходящим образом. А именно, занумеруем эти точки по возрастанию координаты x и выберем их положение таким образом, что расстояние между первой и второй гораздо меньше расстояния между второй и третьей, которое, в свою очередь, гораздо меньше расстояния между третьей и четвертой, и так далее. Тогда для построения частей Γ^\pm искомым тропическим кривых достаточно задать лишь последовательность типов перестроек, а номера точек, участвующих в каждой из перестроек, определяются уже однозначно: в каждой перестройке участвует пара соседних точек с наименьшими соседними номерами, у которых угол между содержащими их ребрами отрицателен.

Полезно иметь переформулировку проведенных рассуждений на двойственном языке диаграмм Ньютона. На этом языке удобнее нумеровать не точки пересечения тропической прямой с прямой ℓ_t , а отрезки, на которые эти точки разбивают прямую ℓ_t (они соответствуют целым точкам диаграммы Ньютона). Направление прямой ℓ_0 задает линейную функцию ℓ^* на плоскости диаграммы Ньютона, прямые уровня которой перпендикулярны прямой ℓ_0 . Занумеруем целые точки диаграммы Ньютона в порядке возрастания значений функции ℓ^* .

Определение. *Монотонным путем P на диаграмме Ньютона Δ называется произвольная ломаная с началом в наименьшей целой точке и концом в наибольшей, вершины которой целочисленны и упорядочены по возрастанию номеров.*

Монотонные пути, с $c(d, n) + 1$ вершинами в точности соответствуют конфигурациям направлений тропической кривой в исходных точках тропической плоскости. Поэтому суммирование в формуле (2) осуществляется, фактически, по множеству всевозможных монотонных путей на диаграмме Ньютона. Построение кривых Γ^\pm и вычисление кратностей $m^\pm(P)$ также можно переформулировать на языке диаграмм Ньютона. Приведем соответствующее описание для Γ^+

(для Γ^- описание аналогично).

Перестройка пересечения тропической кривой с прямыми ℓ_t соответствует перестройке пути. В разрешенной перестройке участвует вершина пути с *наименьшим номером*, у которой два примыкающих ребра пути образуют между собой *положительный угол*.

Одна из возможных перестроек состоит просто в исключении вершины из пути. При этом точки, не являющиеся общими для путей до и после перестройки, образуют треугольник. Во второй возможной перестройке точки, не являющиеся общими для путей до и после перестройки, образуют параллелограмм, две стороны которого образованы ребрами исходного пути, примыкающими к участвующей в перестройке вершине. Новый путь проходит по двум другим сторонам параллелограмма. Последняя перестройка применима, только если получившийся путь лежит в Δ .

Последовательность перестроек считается допустимой, если получившийся в результате этих перестроек путь проходит по границе диаграммы Δ и содержит все целые точки соответствующей части границы.

Последовательность треугольников и параллелограммов, участвующих в допустимой последовательности перестроек, задает разбиение части Δ^+ диаграммы Ньютона, расположенной «правее» исходного пути P . Кратностью полученного разбиения называется произведение удвоенных площадей участвующих в нем треугольников. Наконец, величина $m^+(P)$ вычисляется как сумма кратностей всех допустимых последовательностей перестроек исходного пути P .

В правой части рисунка 9 изображена последовательность перестроек пути, соответствующая кривой Γ^+ левой части рисунка. Область Δ^+ диаграммы выделена серым цветом. Нумерация областей разбиения соответствует последовательности проводимых перестроек.

Нумерация точек диаграммы Ньютона и кратности путей зависят от выбора линейной функции ℓ^* на плоскости диаграммы. Тем не менее, инвариант $N_{d,n}$ не зависит от этого произвола.

Пример. Две из возможных нумераций целых точек диаграммы Ньютона при $d = 3$ изображены на рисунке 10. Для каждой из этих нумераций приведены монотонные пути P , дающие ненулевой вклад $m^-(P) \cdot m^+(P)$ в $N_{3,1}$ (этот вклад изображен снизу пути). Оба случая приводят к одинаковому ответу $N_{3,1} = 12$, однако набор тропических кривых получается разным: в первом случае мы имеем 8 кривых кратности 1 и одну кратности 4, а во втором — 9 кривых кратности 1 и одну кратности 3.

Задача. Изобразите на тропической плоскости все тропические кривые предыдущего примера.

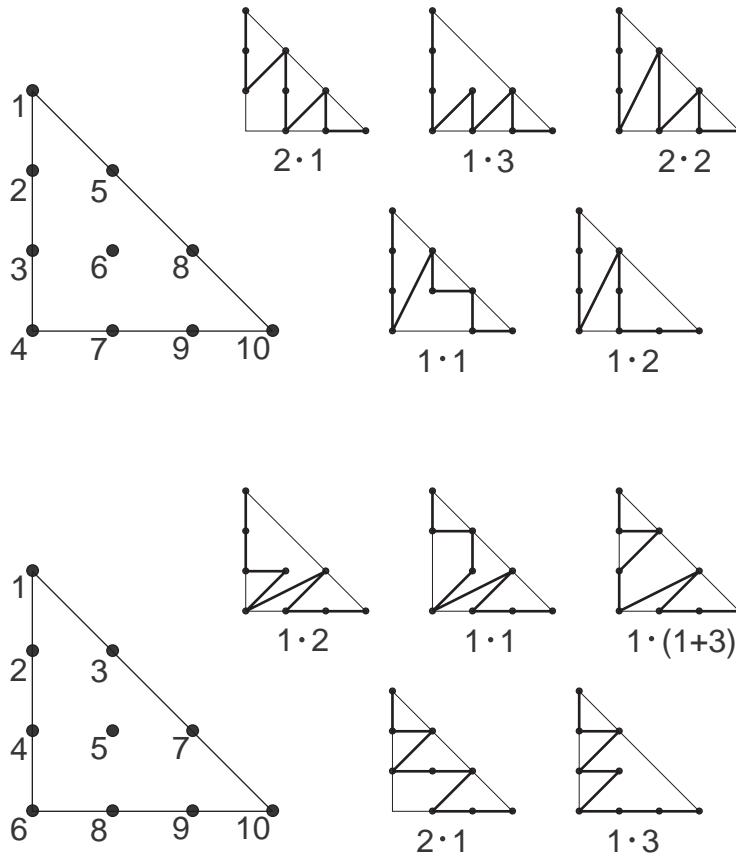


Рис. 10: Два вычисления инварианта $N_{3,1} = 12$ с помощью перечисления монотонных путей на диаграмме Ньютона

8 Вещественные алгебраические кривые и склейка Виро

Методы тропической геометрии позволяют исследовать также геометрию вещественных алгебраических кривых. Вещественная алгебраическая кривая степени d задается многочленом степени d от двух переменных с *вещественными* коэффициентами,

$$F(X, Y) = 0, \quad F(X, Y) = \sum_{i+j \leq d} A_{i,j} X^i Y^j.$$

Если коэффициенты общего положения, то получившаяся кривая является гладкой, то есть состоит из некоторого количества овалов, а также некоторого количества гладких ветвей, «уходящих на бесконечность». Ситуация несколько упростится, если рассмотреть замыкание нашей кривой на (вещественной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Тогда каждая из компонент замыкания является замкнутой (овалом). Например, гладкие кривые степени 2 — эллипсы, гиперболы и пара-

болы — неразличимы на проективной плоскости и состоят из ровно одного овала. Возможные конфигурации овалов (их количество и взаимное расположение) является предметом изучения вещественной проективной алгебраической геометрии.

Согласно классической теореме Харнака, количество овалов вещественной алгебраической кривой степени d не превышает числа

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1.$$

Кривые с максимально возможным количеством овалов называются М-кривыми. При $d = 2, 3, 4, 5$ и 6 количество овалов на М-кривой равно, соответственно, $1, 2, 4, 7$ и 11 .

Для кривой, заданной уравнением с некоторыми конкретными коэффициентами, определить расположение овалов не так-то просто (даже вооружившись современным компьютером). Задача сильно упрощается, если рассмотреть предельную кривую при тропическом вырождении. А именно, рассмотрим семейство кривых $C(t)$ зависящих от вещественного параметра $t > 0$ и предположим, что коэффициенты уравнения кривой $C(t)$ имеют асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ вида

$$A_{i,j}(t) \sim a_{i,j} t^{\alpha_{i,j}}$$

(например, мы можем просто положить $A_{i,j}(t) = a_{i,j} t^{\alpha_{i,j}}$, $a_{i,j} \neq 0$). Тогда имеет место следующее несложное наблюдение.

Предложение. *Количество овалов кривой $C(t)$ и их взаимное расположение при $t \gg 0$ однозначно определяется формой предельной тропической кривой (задаваемой показателями $\alpha_{i,j}$) и знаками коэффициентов $a_{i,j}$.*

Действительно, рассмотрим отдельно поведение кривой в каждом из четырех квадрантов $X \geq 0, Y \geq 0$. Отображение $\text{Log}_t : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (X, Y) \mapsto (\log_t |X|, \log_t |Y|)$ переводит каждый из квадрантов на тропическую плоскость взаимно однозначно. Выберем один из квадрантов, и отождествим его с тропической плоскостью указанным отображением. Тропическая кривая, задаваемая тропическим многочленом

$$\left\langle \sum_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j \right\rangle = \max_{i+j \leq d} (i x + j y + \alpha_{i,j}),$$

разбивает тропическую плоскость на области. Внутри каждой области поведение многочлена $F(X, Y)$ определяется поведением одного из мономов $A_{i,j}(t) X^i Y^j$, и в зависимости от знака коэффициента $A_{i,j}$ (а также выбранного квадранта) многочлен F в данной области либо положителен, либо отрицателен. Закрасим каждую из областей дополнения к тропической кривой в один из двух цветов, в соответствии со знаком многочлена F в этой области. Если две соседние области, граничащие вдоль некоторого ребра, окрашены в разные цвета, то по тереме о промежуточном значении вдоль этого ребра проходит ветвь нашей алгебраической кривой, на которой многочлен обращается в ноль. Если же обе соседние

области окрашены в одинаковые цвета, то вблизи этого ребра нет вещественных точек кривой. Таким образом, для больших значений параметра t кривая $C(t)$ (в выбранном квадранте) приближённо изображается набором некоторого количества явно перечисляемых рёбер тропической кривой.

Указанную процедуру построения кривой $C(t)$ удобно переформулировать на двойственном языке диаграмм Ньютона. Эта процедура, носящая название «patchworking» (склейка Виро), состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

1) Выбираем произвольную триангуляцию диаграммы Ньютона Δ с вершинами в целых точках;

2) Расставляем в вершинах триангуляции знаки, $+$ или $-$, произвольным образом.

3) Отразив диаграмму Ньютона вместе с её триангуляцией последовательно относительно координатных осей, получаем триангуляцию квадрата $|i| + |j| \leq d$, называемого *расширенной диаграммой Ньютона*.

4) Продолжим расстановку знаков на вершины расширенной диаграммы Ньютона, используя следующее правило: знак вершины $(\varepsilon_1 i, \varepsilon_2 j)$ отличается от знака вершины (i, j) множителем $\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

5) В каждом из треугольников построенной триангуляции расширенной диаграммы Ньютона соединим отрезком середины тех сторон, концы которых окрашены в разные цвета (если таковые имеются). Объединение всех построенных отрезков задает ломаную линию на расширенной диаграмме Ньютона. Эта линия и является комбинаторной моделью строящейся алгебраической кривой на *аффинной* плоскости \mathbb{R}^2 .

6) отождествим между собой противоположные точки границы расширенной диаграммы Ньютона. Поверхность, полученная в результате такого отождествления, гомеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, а образ построенной ломаной является комбинаторной моделью строящейся проективной кривой.

Пример. Возможные расположения овалов М-кривых при $d \leq 5$ были известны еще в IX веке. При $d = 6$ для 11 овалов М-кривой возможны только лишь три конфигурации. А именно, имеется один овал, внутри которого расположены 1, 5, или 9 других овалов, а остальные 9, 5, или 1 овал, соответственно, расположены снаружи, причём области, ограниченные овалами, находящимися внутри, или снаружи выделенного, соответственно, не пересекаются, см. рис. 11 (Из двух областей, ограниченных выделенным овалом, одна гомеоморфна диску, а другая — ленте Мёбиуса. Мы считаем внутренней ту область, которая гомеоморфна диску). Первую и последнюю конфигурации обнаружил еще Гильберт. Он ошибочно полагал, что этим список возможных конфигураций исчерпывается. Ошибку Гильберта исправил Гудков в 1969 году, построив пример недостающей конфигурации и доказав несуществование других.

На 11 рисунке приведены примеры этих кривых, построенных при помощи склейки Виро. Серым (соответственно, белым) цветом выделены области дополнения кривой, содержащие положительные (соответственно, отрицательные) вершины расширенной диаграммы Ньютона.

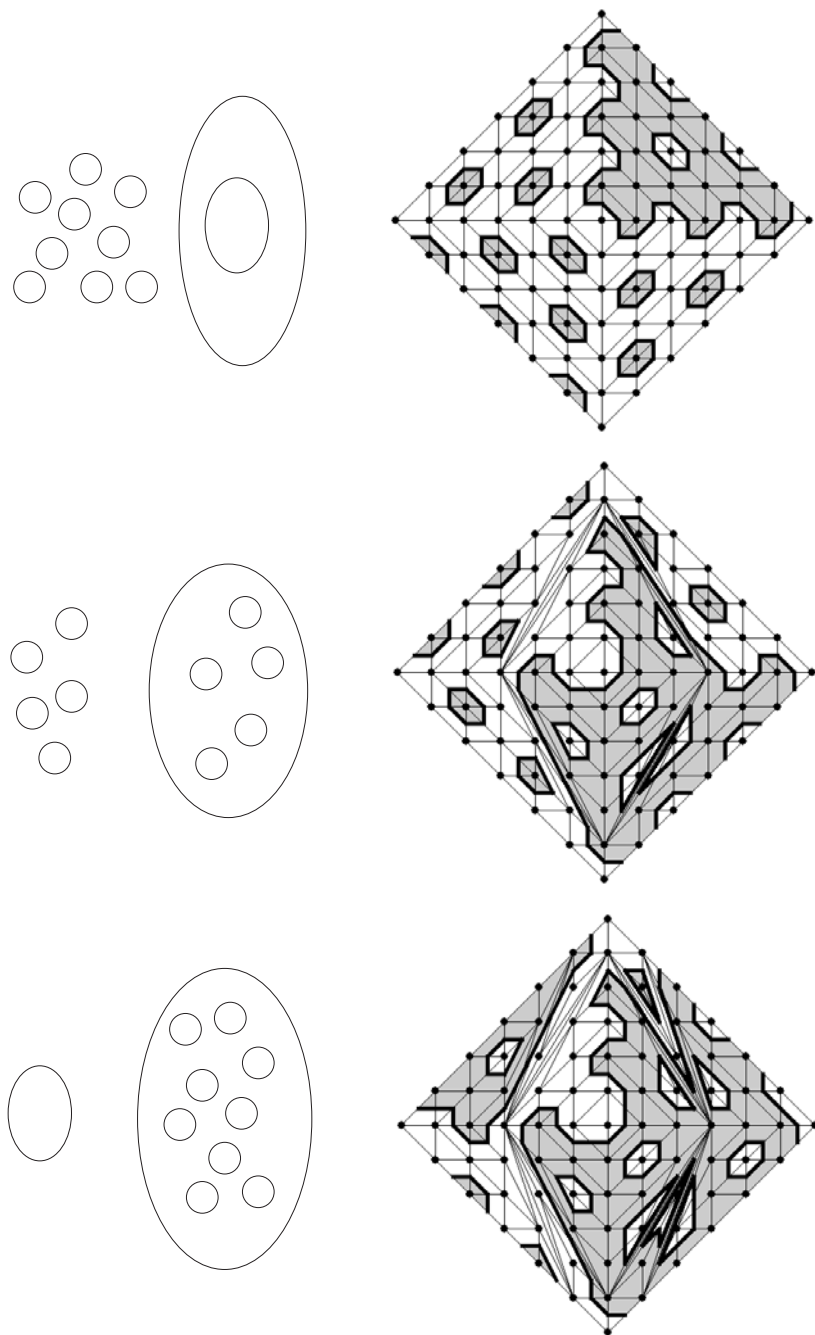


Рис. 11: Вещественные M-кривые степени 6

Большинство примеров реализуемых конфигураций кривых невысоких степеней, известных к настоящему времени, построены методом Виро и его вариациями. В частности, Виро принадлежит полная классификация М-кривых степени 7. Относительно М-кривых степени 8 известно, что число возможных конфигураций не превышает 89. При этом для возможных случаев, не противоречащих ни одному из известных запретов, к настоящему времени построены примеры для 82 конфигураций овалов, а для оставшихся 7 конфигураций пока неизвестно, реализуемы они, или нет.

9 Перечисление вещественных нодальных кривых и инвариант Вельшенжера

Задача перечисления нодальных кривых, рассмотренная в параграфе 5, имеет вещественный аналог. Пусть задан набор из $c(d, n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n - 1$ точек общего положения на вещественной плоскости \mathbb{R}^2 . Требуется определить количество вещественных нодальных кривых степени d с n двойными точками, проходящих через заданные точки плоскости.

У постановки этой задачи имеются некоторые тонкости. В частности, само определение нодальности требует уточнения. Дело в том, что даже если сама кривая вещественна (задается уравнением с вещественными коэффициентами), то вовсе не обязательно, что все её двойные точки вещественны. А именно, на вещественной нодальной кривой имеются двойные точки трёх типов:

- гиперболические: вещественные самопересечения, которые задаются в подходящих локальных координатах уравнением $xy = 0$ (такие точки мы как раз и видим на вещественной картинке);
- пары мнимых комплексно сопряжённых двойных точек (о наличии которых глядя на вещественную картинку мы можем только догадываться);
- эллиптические: двойные точки, которые сами вещественны, но обе проходящие через них ветви кривой не имеют вещественных точек. Точки этого типа задаются в подходящих локальных координатах уравнением $x^2 + y^2 = 0$. На вещественной картинке точки этого типа изолированы.

В непрерывном семействе вещественных нодальных кривых тип двойных точек может меняться.

Пример. Рассмотрим перестройку кривой в момент касания двух её ветвей (рис. 12). До момента перестройки на кривой имеется пара вещественных двойных точек. После перестройки также имеется пара двойных точек, но они комплексно сопряжены и на вещественной плоскости не видны.

Пример. Рассмотрим семейство кривых $y^2 = f_t(x)$, где f_t — многочлен степени 3, имеющий простой корень в точке $x = -t$ и двукратный корень в начале

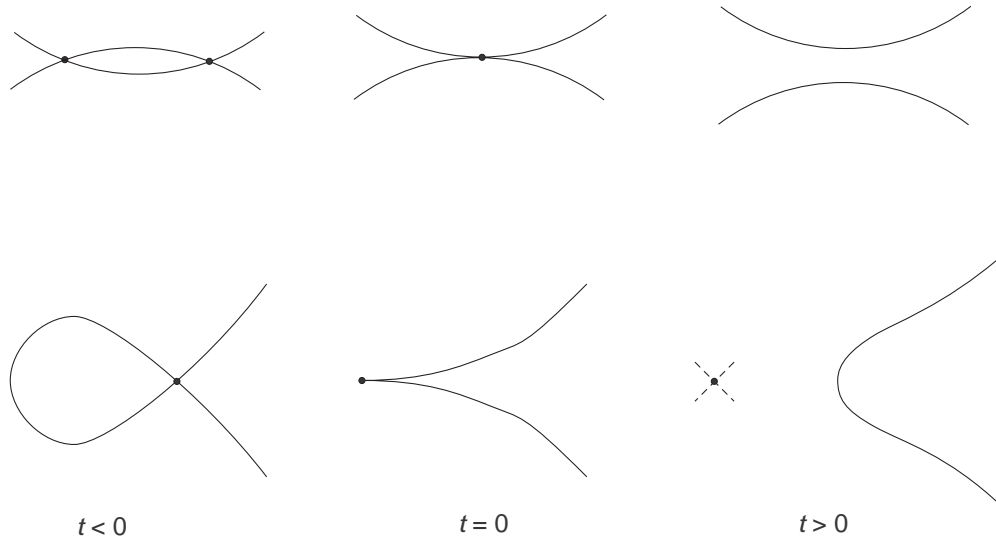


Рис. 12: Перестройки вещественной нодальной кривой

координат: $f_t(x) = x^2(x + t)$. Каждая из кривых этого семейства имеет точку самопересечения в начале координат, однако тип этой точки самопересечения меняется при изменении t : ветви кривой в особой точке вещественны при $t < 0$ и не имеют вещественных точек при $t > 0$, см. рис. 12.

Еще одна сложность связана с тем, что количество вещественных нодальных кривых, проходящих через заданные точки плоскости, зависит от конфигурации этих точек: имеется всего $\overline{N}_{d,n}$ неприводимых комплексных кривых, из которых некоторые вещественны (могут быть заданы уравнением с вещественными коэффициентами), а остальные разбиваются на пары комплексно сопряжённых (уравнение одной кривой пары получается из уравнения другой комплексным сопряжением всех коэффициентов). Тем не менее перечисление вещественных нодальных кривых даёт инвариант, если кривые учитывать с определённым весом, и если выполнено дополнительное ограничение.

Напомним (см. замечание в конце параграфа 5), что род нодальной кривой равен $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n$. Кривые минимально возможного рода $g = 0$ называются *рациональными* (их можно задать параметрически рациональными функциями). У общих рациональных кривых степени d количество двойных точек равно $n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ и размерность пространства их параметров равна

$$c(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2}) = 3d - 1.$$

Определение. *Весом вещественной рациональной кривой C называется число $(-1)^{e(C)}$, где $e(C)$ — количество двойных точек третьего (эллиптического) типа.*

Вельшенжеру принадлежит следующая теорема.

Теорема. Сумма весов вещественных рациональных кривых степени d , проходящих через $3d - 1$ точек плоскости, не зависит от положения этих точек, при условии, что они общего положения.

Число, участвующее в теореме, обозначается через W_d и называется *инвариантом Вельшенжера*. Теорема доказывается перебором всех возможных перестроек, при которых количество вещественных рациональных кривых может меняться. При непрерывном изменении конфигурации точек плоскости вещественные рациональные кривые могут рождаться и умирать парами. При этом количества точек самопересечения эллиптического типа у кривых одной пары имеют соседние значения, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Рассуждения, используемые в доказательстве теоремы, ничего не говорят о том, как этот инвариант вычислить. Даже тот факт, что он отличен от нуля, является вовсе неочевидным. Нетривиальность инварианта Вельшенжера имеет важные следствия. Например, мы получаем автоматически, что вне зависимости от конфигурации точек на вещественной плоскости обязательно имеются проходящие через них рациональные кривые и их количество не меньше $|W_d|$.

Единственный, по-существу, имеющийся в настоящий момент способ, которым этот инвариант можно вычислить для конкретных значений d , состоит в применении тропической геометрии.

Выберем точки на вещественной плоскости в виде $P_i = (\pm t^{x_i}, \pm t^{y_i})$, так что при отображении Log_t они переходят в фиксированный набор точек $p_i = (x_i, y_i)$ тропической плоскости. Рассуждения параграфов 6 и 7 позволяют перечислить все тропические нодальные кривые, проходящие через точки p_i , а значит, и все комплексные рациональные кривые, проходящие через точки P_i для достаточно больших t . Далее, рассуждения параграфа 8 позволяют отобрать те кривые, которые являются вещественными. Более того, для каждой такой кривой легко определить по конфигурации на расширенной диаграмме Ньютона, каковы типы всех её двойных точек, а значит, определить её вес и тем самым, вычислить инвариант Вельшенжера.

Собрав все рассуждения вместе, процедуру вычисления инварианта Вельшенжера можно свести к следующему. Пусть имеется тропическая нодальная кривая. Пусть её кратность (определённая в параграфе 6) равна $m(\Gamma)$.

Определение. Вещественной кратностью $m_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ тропической нодальной кривой Γ называется число

$$m_{\mathbb{R}}(\Gamma) = (-1)^{\frac{m(\Gamma)-1}{2}},$$

если $m(\Gamma)$ нечётно, и $m_{\mathbb{R}}(\Gamma) = 0$, если $m(\Gamma)$ чётно.

Теорема. Инвариант Вельшенжера W_d равен количеству неприводимых нодальных тропических кривых степени d с числом $n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ виртуальных двойных точек, проходящих через заданный набор из $s(d, n) = 3d - 1$ точек общего положения на тропической плоскости и посчитанных с учетом вещественных кратностей.

Пример. В параграфе 7 мы вычислили двумя способами количество рациональных кубических комплексных кривых, проходящих через 8 точек на плоскости. Это число равно $\overline{N}_{3,1} = 9 + 3 = 8 + 4 = 12$. Отсюда мы заключаем, что $W_3 = 9 - 1 = 8 + 0 = 8$. Действительно, тропические кривые кратности 1, 3 и 4 имеют вещественную кратность 1, -1 и 0, соответственно.

Задача. Докажите, что возможные конфигурации тропических рациональных кривых степени 3, проходящих через заданные 8 точек общего положения на тропической плоскости, исчерпываются конфигурациями примера из конца параграфа 7 (8 кривых кратности 1 и одна кратности 4 либо 9 кривых кратности 1 и одна кратности 3).

Вот несколько известных значений инварианта Вельшенжера для небольших d :

d	1	2	3	4	5
W_d	1	1	8	240	18264

В определении тропической версии инварианта Вельшенжера нигде не используется условие рациональности. Более того, *сумма вещественных кратностей тропических кривых с n виртуальными двойными точками и проходящих через заданный набор $s(d, n)$ точек тропической плоскости, не зависит от положения этих точек* (при условии, что они общего положения). Это позволяет определить *тропический* инвариант Вельшенжера $W_{d,n}^{\text{trop}}$ для произвольных d и n . Тропический инвариант Вельшенжера совпадает с обычным в рациональном случае, то есть при $n = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. В общем же случае, в настоящее время неизвестно, как продолжить этот инвариант на алгебраический случай перечисления вещественных нодальных алгебраических кривых. Во всяком случае, имеются контрпримеры, показывающие, что при наивном определении с использованием четности числа эллиптических двойных точек, это число не является инвариантом.

10 Заключительные замечания

Одно из возможных обобщений задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, состоит в том, чтобы заменить треугольную диаграмму Ньютона на произвольный выпуклый многоугольник Δ с целочисленными вершинами на плоскости. С каждым таким многоугольником связано семейство кривых, задаваемых уравнениями

$$\sum_{(i,j) \in \partial \mathbb{Z}^2} A_{i,j} X^i Y^j = 0. \quad (3)$$

Функции, задающие кривые, являются, вообще говоря, многочленами Лорана, поскольку показатели i или j могут быть отрицательными, если многоугольник содержит точки с отрицательными координатами. Поэтому кривые рассматриваются обычно как подмножества в $(\mathbb{C}^*)^2$. Геометрия и топология кривых это-

го семейства определяется формой диаграммы Ньютона Δ . Диаграмма Ньютона является своего рода обобщением понятия степени. Заметим, что всякий автоморфизм целочисленной решетки плоскости (параллельный перенос или линейное преобразование из группы $SL(2, \mathbb{Z})$) сводится к мономиальной замене в пространстве многочленов Лорана. Поэтому рассматриваются такие характеристики многоугольника Δ , которые инвариантны относительно автоморфизмов решетки.

Переход от треугольника к произвольному многоугольнику является не бесполезным усложнением, а насущной необходимостью. С каждым многоугольником связана своя комплексная поверхность (так называемая *торическая*), на которой область $(\mathbb{C}^*)^2$ образует открытое всюду плотное подмножество, и на которую естественно продолжаются кривые семейства. Таким образом, переход к произвольным многоугольникам позволяет описать семейства алгебраических кривых на произвольных (торических) поверхностях. Например, треугольнику $i > 0, j > 0, i + j \leq d$ соответствует проективная плоскость, а прямоугольнику $0 \leq i \leq d_1, 0 \leq j \leq d_2$ — поверхность $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, поскольку кривые на произведении $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ двойной степени (d_1, d_2) задаются в аффинных координатах многочленами, имеющими степень d_1 по переменной X и степень d_2 по переменной Y . Многообразия $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ являются простейшими примерами торических поверхностей.

Пространство параметров семейства кривых (3) имеет размерность $\#\Delta - 1$, где $\#\Delta$ — количество целых точек в Δ . Соответственно, кривые с n двойными точками образуют подпространство размерности

$$c(\Delta, n) = \#\Delta - n - 1.$$

Как и для случая многочленов, можно поставить задачу вычисления количества $N_{\Delta, n}$ кривых семейства, имеющих n двойных точек и проходящих через заданные $c(\Delta, n)$ точек общего положения на комплексной плоскости, а также задачу вычисления инварианта Вельшенжера. Тропическая геометрия дает универсальный способ решения этих задач.

Предположим, что коэффициенты многочлена левой части равенства (3) зависят от вещественного параметра $t > 0$ и имеют при больших t асимптотическое поведение вида $A_{i,j} \sim \text{const } t^{\alpha_{i,j}}$. Тогда предел такого семейства описывается тропической кривой, связанной с тропическим многочленом

$$\max_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} (i x + j y + \alpha_{i,j}).$$

Для этой кривой выполняется условие рациональности наклона ребер и условие сбалансированности в вершинах. Единственное отличие от случая, рассмотренного в предыдущих параграфах, состоит в направлении бесконечных ребер. А именно, эти направления определяются направлением граничных отрезков диаграммы Ньютона.

Описанный выше способ решения задач перечисления нодальных кривых дословно переносится на случай кривых, связанных с произвольным многоугольником Δ . Определение количества виртуальных двойных точек, перечисление

тропических кривых, проходящих через заданные точки тропической плоскости, определения вещественной и комплексной кратности, перечисление монотонных путей на диаграмме Ньютона — все это без изменения переносится на случай произвольного выпуклого многоугольника Δ .

Пример. Вычислим инвариант $N_{\Delta,3}$, отвечающий диаграмме Ньютона, изображённой в левой части рисунка 13. Для этого упорядочим ее целые точки по

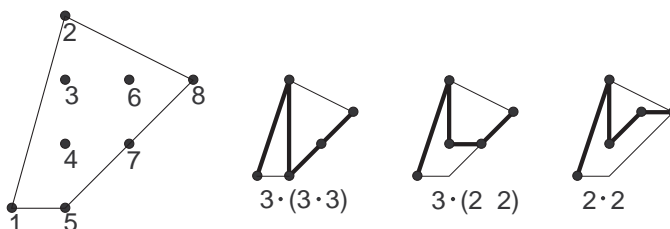


Рис. 13: Перечисление тропических подальных кривых с заданной диаграммой Ньютона

возрастанию линейной функции $x - 0.1y$. Возможные монотонные пути на диаграмме и их кратности изображены в левой части рисунка. Каждому из трех путей отвечает по единственной тропической кривой, суммарная кратность которых равна $N_{\Delta,3} = 27 + 12 + 4 = 43$. Соответственно, инвариант Вельшенжера равен $W_{\Delta} = -1 + 0 + 0 = -1$. При изменении конфигурации точек количество проходящих через них тропических кривых может достигать шести, однако суммарная кратность (а также суммарная вещественная кратность) остается неизменной.

Задача. Изобразите на тропической плоскости тропические кривые последнего примера.

Рассмотренные нами конструкции тропической геометрии имеют многочисленные обобщения, активно развиваемые в настоящее время. В частности, существует геометрия старших размерностей. При этом увеличиваться может как размерность объемлющего пространства (кривые в многомерном пространстве), так и размерность самих тропических многообразий. Многие понятия классической алгебраической геометрии (такие, например, теория пересечений, исследование пространств модулей) имеют свои тропические аналоги. Тропические версии всех этих понятий являются элементарными и несомненно более простыми, чем их комплексные оригиналы (если игнорировать появляющиеся комбинаторные сложности). Бытует даже мнение (которое я лично не разделяю), что с появлением методов тропической геометрии необходимость в большой части комплексной геометрии отпала и она должна быть просто выброшена на свалку истории. Как бы то ни было, появление тропической геометрии является одним из самых ярких открытий недавнего времени и несомненно, оно существенно отразится на всём развитии математики в будущем.

В заключение приведем несколько ссылок для дальнейшего ознакомления. Тропическая геометрия — наука молодая; большинство её статей написано на английском языке и доступно только в виде препринтов. Общее представление о ней можно получить по обзорам [1] и [2]. Тропический метод для подсчета чисел нодальных кривых был разработан Г. Михалкиным. Наиболее полное изложение этого метода содержится в [3]. Статьи [4] и [5] содержат дальнейшие усовершенствования метода. Представление о вещественной алгебраической геометрии и склейке Виро можно получить по популярным запискам лекций О. Я. Виро, размещенных на его Интернет странице, [6] и [7]. Инвариант Вельшенжера был введен в [8]. Вычислению этого инварианта при помощи методов тропической геометрии посвящены статьи [9] и [10].

Список литературы

- [1] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin, Tropical Algebraic Geometry. Preprint.
- [2] G. Mikhalkin, Tropical Geometry. Preprint,
<http://www.math.toronto.edu/mikha/book.ps>.
- [3] G. Mikhalkin, Enumerative Tropical Algebraic Geometry in \mathbb{R}^2 . J. Amer. Math Soc. **18** (2005), 313–377. [arXiv:math.AG/0312530](https://arxiv.org/abs/math/0312530).
- [4] A. Gahtmann and H. Markwig, The numbers of tropical plane curves through points in general position. Preprint [arXiv:math.AG./0504390](https://arxiv.org/abs/math/0504390).
- [5] A. Gahtmann and H. Markwig, The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants. Preprint [arXiv:math.AG./0504392](https://arxiv.org/abs/math/0504392).
- [6] O. Ya. Viro, Introduction into Topology of Real Algebraic Varieties.
<http://www.math.uu.se/~oleg/es/index.html>.
- [7] O. Ya. Viro, Patchworking Real Algebraic varieties.
<http://www.math.uu.se/~oleg/pw.ps>.
- [8] Welschinger, J.-Y.: Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. Invent. Math., **162** (2005), 195–234. [arXiv:math.AG/0303145](https://arxiv.org/abs/math/0303145).
- [9] И. В. Итенберг, В. М. Харламов, Е. И. Шустин Логарифмическая эквивалентность инвариантов Вельшенже и Громова-Виттена. УМН, 2004, 59:6, 85-110.
- [10] I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin. A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces. Preprint [arXiv:math.AG/0608549](https://arxiv.org/abs/math/0608549).