Отчет Никольской Ольги Владимировны по гранту Фонда "Династия" за 2011 - 2013 гг

Предполагаемый план исследований на 2011-2013 гг.

В 2011 году предполагалось доказать гипотезу Ходжа и стандартную гипотезу $B(X)$ для расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_2$ двух неизотривиальных семейств $K3$ поверхностей $\pi_k : X_k \to C \quad (k = 1, 2)$ со стабильными вырождениями при условии, что для любой точки $s \in C$ хотя бы один из слоёв X_{1s}, X_{2s} неособый, а для общего геометрического слоя X_{ks} число $22 - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{ks}) = p_k$ является нечётным простым $(k = 1, 2)$ и $p_1 \neq p_2$.

При доказательстве этого результата предполагалось использовать тонкие факты из теории смешанных структур Ходжа, а также существование некоторых *канонических* разложений когомологий, связанных со спектральными последовательностями Лере.

В 2012 году предполагалось доказать стандартную гипотезу $B(X)$ для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \to C$ - неизотривиальное семейство $K3$ поверхностей с полустабильными вырождениями и $X_2 \to C$ - абелева схема относительной размерности 2, причем для общего геометрического слоя X_{ks} $(k = 1, 2)$ выполнены следующие условия: $22 - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) = p_1$ - нечётное простое число и $\mathrm{End}(X_{2s}) \widetilde{\to} \mathbb{Z}$.

В 2013 году предполагалось обобщить эти результаты, ослабив требования к гладкости слоёв и числам p_k. Предполагалось также защитить кандидатскую диссертацию.

1. Результаты, полученные в 2013 году:

Гладкая комплексная проективная поверхность S называется $K3$ поверхностью, если $\Omega^2_S \widetilde{\to} \mathcal{O}_S$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

В дальнейшем $\pi_k : X_k \to C \quad (k = 1, 2)$ – сюръективный морфизм гладкого проективного 3-мерного многообразия X_k на гладкую проективную кривую C, общий геометрический слой которого является $K3$ поверхностью. Мы называем семейство $\pi_k : X_k \to C$ неизотривиальным, если существуют хотя бы два неизоморфных гладких геометрических слоя морфизма π_k.

Для гладкого слоя X_{ks} обзначим через $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ ортогональное дополнение к пространству $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}(X_{ks}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ относительно индекса пересечения. Через $\mathrm{Hg}(X_{ks})$ обозначим группу Ходжа $K3$ поверхности X_{ks}.

Пусть $\pi_k : X_k \to C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что все слои морфизма π_k являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, общий геометрический слой X_{ks} является $K3$ поверхностью ($k = 1, 2$). Если любая локальная монодромия γ, ассоциированная с особым слоем и действующая на $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$, удовлетворяет условию $N^2 \neq 0$, где $N = \log(\gamma)$, то мы говорим, что $\pi_k : X_k \to C$ – семейство $K3$ поверхностей с полустабильными вырождениями *рационального* типа. Согласно результатам Вик.С. Куликова, в этом случае можно считать, что все вырожденные слои морфизма π_k являются объединениями гладких *рациональных* поверхностей V_i кратности 1 с нормальными пересечениями, двойные кривые $C_{i,j}$ на каждой поверхности V_i являются гладкими *рациональными* кривыми, образующими цикл, локализация семейства $\pi_k : X_k \to C$ над любым открытым диском в C имеет тривиальный канонический класс.

План в основном выполнен, получены доказательства гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы Гротендика об алгебраичности оператора Ходжа звездочка для гладких проективных моделей расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств K3 поверхностей над гладкой проективной кривой при слабых ограничениях на вырождения и ранги групп Нерона - Севери общих геометрических слоев семейств. Это позволит в дальнейшем проверить гипотезу Мюрре о существовании разложения Чжоу - Кюннета, а также мотивную гипотезу Лефшеца для рассматриваемых многообразий в случае вырождений рационального типа (когда компоненты вырожденного слоя семейства и их пересечения рациональные).

Не удалось распространить доказательство гипотезы Гротендика на случай расслоенного произведения семейства K3 поверхностей и абелевой схемы относительной размерности 2 над гладкой проективной кривой (причина - недостаток времени).

Результаты, опубликованные в Известиях РАН [4]:

0.1. Теорема. *Пусть* $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – *проективное неизотривиальное семейство* $K3$ *поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C. *Предположим, что множества* $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\}$ $(k = 1, 2)$ *не пересекаются.*

Если для общих геометрических слоев X_{1s} *и* X_{2s} *выполнены следующие условия*:

(i) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечетным числом*;

(ii) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X *расслоенного произведения* $X_1 \times_C X_2$ *верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.*

Если, кроме того, морфизмы π_1 *и* π_2 *гладкие,* $p_k = 22 - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – *нечетные простые числа и* $p_1 \neq p_2$, *то для* $X_1 \times_C X_2$ *верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов* $*$ *и* Λ *теории Ходжа.*

0.2. Теорема. *Пусть* C *- гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел,* $\pi_1 : X_1 \to C$ *- гладкое проективное неизотривиальное семейство* $K3$ *поверхностей, причем для общего геометрического слоя* X_{1s} *число* $22 - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) = p_1$ *является нечётным простым. Тогда для расслоенного квадрата* $X = X_1 \times_C X_1$ *верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика* $B(X)$ *типа Лефшеца об алгебраичности операторов* $*$ *и* Λ *теории Ходжа.*

Результаты, поданные в печать в Математические заметки [5]:

Теорема 1. *Для проективных неизотривиальных семейств* $\pi_k : X_k \to C$ $K3$ *поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C *предположим, что общие геометрические слои* X_{1s}, X_{2s} *удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий*:

(i) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечетным числом,* $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(ii) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$, $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X *расслоенного произведения* $X_1 \times_C X_2$ *верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.*

Теорема 2. *Гипотеза Ходжа верна для гладкой модели* X *расслоенного квадрата* $X_1 \times_C X_1$, *если семейство* $K3$ *поверхностей* $\pi_1 : X_1 \to C$ *неизотривиальное и для общего геометрического слоя* X_{1s} *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(iii) $p_1 = 22 - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ – *нечетное простое число;*

(iv) $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$ *и* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$.

Результаты, поданные в печать в Математический сборник [6]:

Теорема. Пусть $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – проективные неизотривиальные семейства $K3$ поверхностей (возможно с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что общие геометрические слои X_{1s}, X_{2s} удовлетворяют следующим условиям:

(i) кольцо $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$,

(ii) $\mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$,

(iii) $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – вполне вещественное поле или $\mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

2. Опубликованные и поданные в печать работы:

[1] О.В.Никольская, Об алгебраических циклах на расслоенном произведении гладких семейств K3 поверхностей, Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 1-5 июля 2011 года), тезисы доклада, 150-152.

[2] О.В. Никольская, "Об алгебраических циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств $K3$ поверхностей", Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 29 июня - 4 июля 2012 года), тезисы доклада, 128-129.

[3] О.В. Никольская, "О циклах на гладкой модели расслоенного произведения семейств $K3$ поверхностей", Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 5-9 июля 2013 года), тезисы доклада, 177-179.

[4] О.В. Никольская, "Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств $K3$ поверхностей", Известия РАН. Серия математическая 77:1 (2013), 145-164.

[5] О.В. Никольская, "Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей", Математические заметки (статья находится в редакции журнала).

[6] О.В. Никольская, "О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей", Математический сборник РАН (статья принята к печати).

3. Участие в конференциях и школах:

Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011, 2012, 2013 гг).

Летняя школа по алгебраической геометрии (Ярославль, 2011 г).

Конференция "Рождественские математические встречи, посвященная двадцатилетию Независимого Московского университета и организуемой НМУ, Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и фонлом Дмитрия Зимина "Династия"(Москва, 2012 г).

4. Работа в научных центрах и международных группах:

2011-2012 г. - работала по гранту РФФИ № 09-01-00132-а (научный руководитель Танкеев С.Г.).

2012-2013 г. - работаю по гранту РФФИ № 12-01-00097-а (научный руководитель Танкеев С.Г.).

5. Педагогическая деятельность:

Работаю ассистентом кафедры алгебры и геометрии Владимирского государственного университета имени А.Г. и Н.Г.Столетовых.

Подготовлены кандидатская диссертация и автореферат.