

# Отчёт для фонда Династия 2012 год

Зыкин А. И.

## 1 Результаты, полученные в этом году

Основным направлением исследований было изучение асимптотических проблем над числовыми и функциональными полями. Изучались следующие основные задачи:

### **Асимптотика средних значений $L$ -функций модулярных форм, подкрученных на характеры Дирихле**

Нами были продолжены исследования более тонких асимптотических свойств  $L$ -функций в семействах, которые не удаётся извлечь из стандартной асимптотики (рост порядка логарифма аналитического кондуктора). Совместно с Р. Lebacqze мы занимались следующей задачей. Пусть фиксирована примитивная форма  $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ . Мы исследовали рост средних значений  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Avg}_\chi |\overline{L(s, f, \chi)}|^{iz_1/2} L(s, f, \chi)^{iz_2/2}|^2$  для  $L$ -функции модулярной формы  $f$ , скрученной на характер  $\chi$ , когда  $\chi$  пробегает нетривиальные характеры  $\text{mod } N$ , а  $N$  — простое число. Для подобных средних, аналогично случаю  $L$ -функций характеров Дирихле (без модулярной формы), исследованному в работах У. Пага, при  $\text{Re } s > \frac{1}{2}$  получено выражение в терминах некоторой “ $M$ -функции.” Получающиеся  $M$ -функции имеют эйлеровское произведение и другие замечательные аналитические свойства. Кроме того, было получено описание поведения средних  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Avg}_\chi \Phi(L(s, f, \chi))$  для непрерывных и ограниченных тестовых функций  $\Phi$ . Ответ, как и у Ихары, описывается в терминах преобразования Фурье  $M$ -функций.

### **Количество точек в семействах кривых над конечными полями**

Важную информацию при исследовании асимптотических свойств многообразий над конечными полями дают примеры башен кривых. Одним самых интересных (и единственным асимптотически оптимальным) примером являются башни модулярных кривых над конечными полями. Описание башен модулярных кривых с помощью рекурсивных уравнений было дано N. Elkies’ом, в согласии с более ранними результатами А. Garcia и Н. Stichtenoth о построении рекурсивных оптимальных башен над конечными полями. Совместно с А. Зайцевым мы продолжили исследовать коэффициенты разложения в ряд Тейлора дзета-функций кривых как функции от номера этажа в башне. Были получены явные формулы для производящих функций для таких коэффициентов. Например, для башни рекурсивной

башни Гарсии–Штихтенота, задаваемой уравнением  $x_n^2 + x_n = \frac{x_{n-1}^3}{x_{n-1}^2 + x_{n-1}}$  над полем  $\mathbb{F}_4$  для производящей функции для  $a_4(n)$  — количества точек на  $n$ -ом этаже башни над полем  $\mathbb{F}_{4^n}$  — получена следующая формула:

$$128x^5 + 192x^4 + 160x^3 + 80x^2 + 24x - 4 + \frac{-256}{x-1} + \frac{-1}{x-1/2}.$$

Подобные формулы были получены (с использованием компьютерных вычислений) и для количества точек над  $\mathbb{F}_{4^n}$  при больших  $n$ , а также для некоторых других рекурсивных асимптотически хороших (но не обязательно оптимальных) башен над  $\mathbb{F}_8$  и  $\mathbb{F}_9$ . Во всех случаях оказывается, что количество точек на кривых в башне над полем  $\mathbb{F}_{q^n}$  с точностью до многочлена от  $n$  совпадает с количеством  $\mathbb{F}_{q^n}$ -точек на модулярных кривых, описываемых явно (например, приходящих из суперсингулярных эллиптических кривых в случае башни Гарсии–Штихтенота), которое растет экспоненциально. Одна из целей дальнейших исследований — понять, почему других рациональных точек на модулярных кривых так мало.

По данным результатам готовится статья.

## 2 Опубликованные и поданные в печать работы

- *Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory* (редактор, совместно с Y. Aubry и C. Ritzenthaler), Contemporary Mathematics, Vol. 574 (2012), 183 pp;

## 3 Участие в конференциях и школах

- Летняя школа “Современная математика”, 07.2012, Дубна.  
Доклад: “Конгруэнтные числа и эллиптические кривые”.

*Организация конференций:*

- “Zeta Functions 4”, 11.2012, г. Москва (совместно с P. Lebacque, M. A. Цфасманом и M. Hindry).
- Летняя Школа “Алгебра и геометрия”, 07.2012, г. Ярославль (совместно с Ф. Богомоловым, А. С. Тихомировым и С. А. Тихомировым).
- “Arithmetic days”, 04.2012, г. Москва (совместно с И. Фесенко и И. Жуковым).

## 4 Работа в научных центрах и международных группах

- Научный визит в Institut Fourier, Grenoble, 06.2012  
Доклад: “Propriétés asymptotiques des fonctions zêta”
- Научный визит в Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, 12.2012

## 5 Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

- Организация и доклады на семинаре “Арифметика, геометрия и теория кодирования” (совместный семинар лаборатории Poncelet–ИППИ).
- Совместные курсы НИУ ВШЭ и НМУ “Теория чисел” (2011–2013) и “Дополнительные главы теории чисел” (2011-2012).
- Ведение семинаров “Модулярные формы” (2012–2013, совместно с О. Шварцманом) и “Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Гауа” (2011–2012) для студентов НИУ ВШЭ.
- Лекции и семинары по дискретной математике (весна 2012), прием задач в НИУ ВШЭ.
- Индивидуальный курс “Global Fields” для студента МІМ.
- Руководство курсовыми работами студентов НИУ ВШЭ (8 человек в 2012 году). Один из учеников получил вторую премию на конкурсе Мёбиуса для студентов в 2012г, другой успешно защитил диплом бакалавра в НИУ ВШЭ.
- Являлся куратором 2-го курса в НИУ ВШЭ.