Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2012 год

Максим Всемирнов

1. Результаты, полученные в 2012 году

Продолжено изучение $(2,3)$-порожденных и гурвицевых (или $(2,3,7)$-порожденных) групп. В частности, полностью решена проблема о (2,3)-порождении группы $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$. А именно, показано, что с точностью до сопряженности в $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ имеется ровно четыре пары матриц x, y, таких, что $x^2 = y^3 = 1$ и $\langle x, y\rangle = \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$. Ранее в работах автора было показано, что таких пар образующих по крайней мере четыре, но не более 32, причем список потенциальных образующих был указан явно. В этом году удалось исключить “лишние” 28 пар. В данный момент идет работа над текстом статьи.

Также продолжено исследование явных гурвицевых образующих для групп малых рангов. Параметризованы (с точностью до сопряженности) все неприводимые тройки (x, y, xy) в $\mathrm{PSL}_6(\mathbb{F})$, такие, что $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$. Ранее аналогичный результат был получен только для троек, удовлетворяющих так называемому условию жесткости. В этом году параметризацию удалось перенести и на нежесткий случай. Показано, что соответствующие нежесткие тройки образуют двухпараметрическое семейство. Показано, что если характеристика $\mathbb{F}$ отлична от 2, то для таких троек $\langle x, y\rangle \le \mathrm{PSp}_6(\mathbb{F})$. В случае, когда характеристика $\mathbb{F}$ равна 2, $\langle x, y\rangle \le G_2(\mathbb{F})$. Естественным продолжением этого результата должно стать полное описание получающихся гурвицевых групп $\langle x, y\rangle$. Работа над этой задачей уже ведется, но полное решение ожидается в 2013 году. В частности, предварительные результаты показывают, что следует ожидать, что для всех достаточно больших нечетных q группы $\mathrm{PSp}_6(q)$ гурвицевы.

В 2012 году шла работа над статьей, посвященной коротким унитреугольным матричным факторизациям. Показано, что произвольная матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ может быть разложена в произведение 5 элементарных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Также показано, что в общем случае четырех сомножителей недостаточно. (Отметим, что случай $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ существенно отличается от классической ситуации $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$; произвольная матрица из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ также раскладывается в произведение элементарных, но требуемое число сомножителей может быть сколь угодно велико.)

Стоит отметить, что этот результат и по своей сути, и по используемой технике является, скорее, не алгебраическим, а арифметическим. Например, ранее близкие к оптимальным оценки на число сомножителей удавалось получить (Кук, Уайнбергер; Вавилов, Смоленский, Сури) лишь в предположении обобщенной гипотезы Римана. В отличие от прежних результатов, полученное мной доказательство является безусловным.

Хотя сам результат и был предварительно анонсирован в 2011 году, окончательная работа над текстом статьи велась в 2012 году. При этом в ходе работы пришлось восполнять некоторые пробелы в исходном рассуждении, что привело к определенным техническим сложностям. Работа принята в The Quarterly Journal of Mathematics.

В 2012 году был начат совместный проект с П.Саесом и К. Видо (Университет Консепсьона), посвященный свойствам последовательностей Бюхи. Последовательность Бюхи — это последовательность квадратов $a_1^2,\dots,a_n^2$, такая, что двукратное применение разностного оператора дает постоянную последовательность из двоек. В частности, такая последовательность называется тривиальной, если она состоит из последовательных квадратов, то есть $a_1^2 = x^2$, $a_2^2 = (x+1)^2,\dots,a_n = (x+n-1)^2$.

Возникает естественный вопрос: какова может быть длина нетривиальной последовательности Бюхи? Изначально задача ставилась для кольца целых чисел, но она допускает естественное обобщение и на другие кольца. Даже в случае $\mathbb{Z}$ ответ не известен.

Я доказал, что в кольце $K[x]$, $\mathrm{char}(K) = 0$, длина нетривиальной последовательности Бюхи, содержащей хотя бы один неконстатнтный многочлен, не больше 5. Не вдаваясь в технические подробности, отмечу, что результат можно перенести и на кольца $K[x]$ с $\mathrm{char}(K) > 0$. При этом следует так модифицировать определение тривиальной последовательности, чтобы включить еще одно естественное семейство решений, возникающих только в ненулевой характеристике.

В совместной работе с П.Саесом и К. Видо начато исследование последовательностей Бюхи в кольцах $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. В частности, получены нижняя оценка $c\log p$ для максимума длин нетривиальных последовательностей в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для простых p; показано, как связаны максимальные длины нетривиальных последовательностей в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и в $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$; найдена явная формула для числа последовательностей Бюхи длины 4 в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. В последней задаче ответ удается выразить в терминах числа точек некоторой вполне определенной эллиптической кривой.

2. Публикации

Работы, опубликованные в 2012 году:

- M. A. Pellegrini, M. C. Tamburini Bellani, M. A. Vsemirnov. Uniform $(2,k)$-generation of the 4-dimensional classical groups. *Journal of Algebra* 369 (2012), 322–350.

- M. Vsemirnov. On the evaluation of R.Chapman's "evil determinant". *Linear Algebra and its Applications*, 436 (2012), no. 11, 4101–4106.

Работы, принятые в печать:

- M. Vsemirnov. Short unitriangular factorizations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$. *The Quarterly Journal of Mathematics* (in print, doi:10.1093/qmath/has044).

- M. Vsemirnov. On R. Chapman's "evil determinant": case $p \equiv 1 \pmod 4$. *Acta Arithmetica* (accepted).

Работы, представленные в печать:

- V. L. Vasilyev, M. A. Vsemirnov. On the $(2,3)$-generation of symplectic groups of large rank. *Journal of Pure and Applied Algebra.* (under revision).

Препринты и тексты в процессе подготовки.

- M. Vsemirniov. A new upper bound on the size of polynomial Büchi sequences. 10p.
- P. Saez, X. Vidaux, M. Vsemirnov. Optimal bounds for Büchi sequences over $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- M. Vsemirnov. Classification of $(2,3)$-generating pairs of $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ up to conjugation.

3. Участие в конференциях, доклады на семинарах

- 8–10 января 2012. Рождественские встречи лауреатов фонда "Династия". Тема доклада: "Задача Чэпмена о 'зловещем определителе' и гипотеза Анкени-Артина-Чоулы".
- 23–28 апреля 2012. Международная конференция "Polynomial computer algebra", Санкт-Петербург. Тема доклада: "Recent results on (2,3)-generated and Hurwitz groups".
- 25–28 сентября 2012. Второй Российско-финский симпозиум по дискретной математике; Турку, Финляндия. Тема доклада: "Büchi sequences and related problems".

Доклады на семинарах:

- Март 2012. Расширенное заседание семинара лаборатории математической логики ПОМИ, посвященное 65-летию Ю.В.Матиясевича. "Определители Чепмена и гипотеза Анкени—Артина—Чоулы".
- Август 2012. Совместный математический семинар университета Био-Био и университета Консепсьона (Чили). "Chapman determinants and the Ankeny—Artin—Chowla conjecture".

4. Педагогическая деятельность

В 2012 году я продолжил преподавательскую деятельность на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Кроме того, под моим руководством студент 5 курса СПбГУ А. А. Афанасьев подготовил и защитил дипломную работу "Жесткие гурвицевы тройки и гурвицевы подгруппы в $\mathrm{PGL}_8(F)$". В настоящее время А. А. Афанасьев поступил в аспирантуру ПОМИ РАН, где продолжает обучение под моим руководством.

5. Организационная деятельность

Председатель оргкомитета международной конференции “Алгебраические группы и связанные с ними структуры”, Санкт-Петербург, 17–22 сентября 2012 г.

6. Экспертная деятельность

В 2012 году я был рецензентом двух дипломных работ, защищенных на кафедре высшей алгебры и теории чисел СПбГУ, рецензировал статьи для журналов *Современные проблемы математики*, *Записки научных семинаров ПОМИ*, а также проводил экспертизу работ по запросу ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ (Республиканский исследовательский научно-консультационный центр экспертизы).