

# Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2011 год

МАКСИМ ВСЕМИРНОВ

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2011 ГОДУ

Основная тематика исследований в 2011 году была связана с задачей о том, может ли та или иная группа быть порождена инволюцией и элементом порядка  $k$  (так называемое  $(2, k)$ -порождение).

В совместной работе с М. Пеллегрини и М.К. Тамбурини [5] построены  $(2, k)$  образующие группы  $SL_4(p^n)$ ,  $SU_4(p^n)$ ,  $Sp_4(p^n)$  для  $k = p, 2p$  или  $k \mid p^n \pm 1$  (с некоторыми явно описанными исключениями в случае  $p = 2, 3$ ).

Другая серия работ посвящена вопросу о том, какие конечные простые группы не могут быть порождены инволюцией и элементом порядка 3. Из работ М. Либекка, А. Шалева, Г. Малле, Ф. Любека, А. Волдера известно, что к таким группам относятся три бесконечные серии  ${}^2B_2(2^{2k+1})$ ,  $PSp_4(2^k)$ ,  $PSp_4(3^k)$  и лишь конечное число других исключений. Однако вопрос о полноте списка исключений до сих пор открыт. Известно лишь, что новые примеры не  $(2,3)$ -порожденных групп могут быть только среди классических матричных групп малых рангов, определенных над полями небольшого размера. Причем явные верхние оценки на ранг и размер поля также нигде не публиковались. В вышедшей в 2011 г. работе [2] я доказал, что группа  $PSU_5(2^2)$  не является  $(2, 3)$ -порожденной. Позднее мне удалось доказать, что также и ортогональные группы  $\Omega_8^+(2)$  и  $P\Omega_8^+(3)$  не являются  $(2, 3)$ -порожденными. В настоящее время идет работа над текстом статьи. Кроме того, были проведены компьютерные эксперименты для других классических конечных групп малых рангов для полей небольшого размера. Результаты этих экспериментов показывают, что, скорее всего, новых исключений больше нет. Однако доказательство этого факта является весьма сложной задачей и может занять длительный отрезок времени.

Кроме того, аналогичные вопросы рассматривались и для бесконечных групп. Так, серия совместных работ с моим аспирантом В.Л.Васильевым была посвящена  $(2, 3)$ -порождению симплектических групп  $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ . В статье [1] положительный ответ дан для группы  $Sp_{10}(\mathbb{Z})$ , а в препринте [7] — в случае  $n \geq 25$ . Отметим, что ранее аналогичные результаты были известны для симплектических групп  $Sp_{2n}(R)$  лишь для конечнопорожденных колец  $R$  с обратимой двойкой. Основная техническая сложность состоит именно в возможном ослаблении условия обратимости. В работе [7] нам удалось получить результат не только для  $R = \mathbb{Z}$ , но и для весьма широкого класса конечнопорожденных колец с необратимой двойкой. Предложенный в [7] метод работает в случае, когда кольцо  $R$  аддитивно порождается множеством  $\dots, 2s^{-3}, s^{-2}, 2s^{-1}, 1, 2s, s^2, \dots$  для некоторого  $s \in R^*$ .

Ещё одно направление исследований было связано с нахождением коротких унитарных матричных факторизаций. В 2011 году Н.А. Вавилов, А.В. Смоленский и Б. Сури показали, что для любого простого  $p$  в предположении обобщенной гипотезы Римана односвязная группа Шевалле  $G(\Phi, \mathbb{Z}[1/p])$  допускает короткую унитарную факторизацию

$$G(\Phi, \mathbb{Z}[1/p]) = (U(\Phi, \mathbb{Z}[1/p])U^-(\Phi, \mathbb{Z}[1/p]))^3.$$

Ключевым шагом являлось доказательство существования разложения произвольной матрицы  $A \in \mathrm{SL}_2(\Phi, \mathbb{Z}[1/p])$  в произведение длины 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вавилов, Смоленский и Сури доказали существование разложения (1) в предположении обобщенной гипотезы Римана (или в предположении некоторой усиленной версии гипотезы Артина о первообразных корнях).

Мне удалось дать безусловное доказательство существования разложения (1), не использующее никаких гипотез. Этот результат также допускает следующую интерпретацию: в кольце  $\mathbb{Z}[1/p]$  число шагов в алгоритме Эвклида не превосходит 4. Причем эта оценка далее не улучшается.

В настоящее время идет работа над текстом статьи. Кроме того, я пытаюсь перенести этот результат на более общую ситуацию, когда кольцо  $\mathbb{Z}[1/p]$  заменяется на дедекиндово кольцо арифметического типа с бесконечной мультипликативной группой.

Помимо заявленных в плане 2010 года тем исследования, удалось получить новые результаты и в других областях. В частности, статья [4] и препринт [6] посвящены доказательству двух гипотез Р. Чэпмена. В 2003 году, исследуя свойства арифметических решеток, Робин Чэпмен экспериментально обнаружил любопытные свойства определителей матриц, составленных из символов Лежандра по модулю  $p$ . Неожиданно, эта задача оказалась довольно сложной и несколько лет не поддавалась решению. Р. Чэпмен даже назвал ее “задачей о зловещем дискриминанте”. Мне удалось доказать гипотезы Чэпмена. В частности, в случае  $p \equiv 1 \pmod{4}$  значение определителя выражается в терминах фундаментальной единицы и числа классов поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Кроме того, выявилась интересная связь с гипотезой Анкени-Артина-Чоулы о свойствах фундаментальных единиц квадратичного поля. Оказывается, что эта гипотеза равносильна необращению в 0 по модулю  $p$  одного из определителей Чэпмена. В настоящее время я пытаюсь найти подход к доказательству невырожденности соответствующей матрицы.

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

Статьи в журналах:

1. M. Vsemirnov, V. Vasilyev. The group  $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$  is (2,3)-generated. *Central European Journal of Mathematics*, 2011, v.9, no.1, 36–49.
2. M. Vsemirnov. More classical groups which are not (2,3)-generated. *Archiv der Mathematik*, 2011, v.96, no.2, 123–129.
3. M. Vsemirnov. Quadratic identities for a class of Fibonacci-like polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 2011, v.49, no.3, 220–227.
4. M. Vsemirnov. On the evaluation of R.Chapman’s “evil determinant”. *Linear Algebra and its Applications*, doi:10.1016/j.laa.2011.08.039. Accepted, published online, hard-copy version is to appear in 2012.

## Препринты

5. M.A. Pellegrini, M.C. Tamburini Bellani, M.A. Vsemirnov. Uniform  $(2, k)$ -generation of the 4-dimensional classical groups. ArXiv:1101.2358. Submitted to *Journal of Algebra*.
6. M.A. Vsemirnov. On R.Chapman's evil determinant": case  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . ArXiv: 1108.4031. Submitted to *Acta Arithmetica*.
7. В.Л. Васильев, М.А.Всемирнов. О  $(2, 3)$ -порождении симплектических групп. Препринты ПОМИ РАН, 17/2011.

## Тезисы докладов

8. M. Vsemirnov, Lower bounds for weakly  $k$ -min-wise independent families of permutations. First Russian-Finnish Symposium on Discrete Mathematics. St. Petersburg, September 21–24, 2011. Abstracts. P. 43–44.

## 3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ, ДОКЛАДЫ НА СЕМИНАРАХ

- Июнь 2011. Обзорный курс лекций “ $(2,3)$ -порожденные и гурвицевы группы” (4 лекции). Новосибирский государственный университет и ИМ СО РАН.
- 21–24 сентября 2011. Российско-финский симпозиум по дискретной математике; Санкт-Петербург. Тема доклада: “Lower bounds for weakly  $k$ -min-wise independent families of permutations”.
- 22–25 ноября 2011. Совместная конференция ПОМИ РАН–USTC “Алгебра и динамические системы”; Хэфей, КНР. Тема доклада: “Recent results on  $(2,3)$ -generated and Hurwitz groups”.

## Доклады на семинарах:

- Февраль 2011. Санкт-Петербургский городской семинар им. Д.К.Фаддеева. “Конечные простые группы и  $(2,3)$ -порождение”.
- Март 2011. Алгебраический семинар Китайского университета науки и технологий (USTC), Хэфей, КНР. “Recent progress in the theory of Hurwitz groups”.
- Апрель 2011. Семинар СПбГУ по линейным группам (рук. Н.А.Вавилов). “Эффективное порождение в группах типа Ли (обзор и открытые вопросы)”.
- Сентябрь 2011. Семинар СПбГУ по линейным группам (рук. Н.А.Вавилов). “Короткие унитарные факторизации: безусловное доказательство”.
- Октябрь 2011. Санкт-Петербургский городской семинар им. Д.К.Фаддеева. “Символы Лежандра, числа классов и “зловещий определитель” Чэпмена”.

#### 4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

В июне 2011 года я участвовал в выполнении НИР “Актуальные проблемы современной алгебры” (Новосибирский государственный университет и ИМ СО РАН; при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы, мероприятие 1.4 - II очередь, “Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области математики и механики”).

В марте 2011 года я участвовал в программе “Теория представлений и квантовые группы”, проводимой Пекинским университетом, КНР.

Кроме того, в качестве члена организационного и программного комитетов я участвовал в организации и проведении совместной конференции ПОМИ РАН и Университета науки и технологий Китая (USTC) (Хэфей, КНР, 22–25 ноября 2011 г.)

#### 5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

В 2011 году я продолжил преподавательскую деятельность на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. В весеннем семестре вел практические занятия по курсу “Алгебра и теория чисел” (1 курс) и прочитал спецкурс “Классические матричные группы” (3–4 курс). В осеннем семестре читаю курс “Комбинаторика” для студентов первого курса и руковожу спецсеминаром “Простые группы типа Ли” (4–5 курс).

Кроме того, в марте 2011 года прочитал в Пекинском университете интенсивный курс “Classical matrix groups” (18 часов, на английском языке) в рамках семестра по теории представлений и квантовым группам.

В июне 2011 года прочитал курс лекций по теории чисел (8 часов) для учащихся 10-х классов Академической гимназии СПбГУ. В августе 2011 года прочитал лекцию для учащихся летней школы Санкт-Петербургской Юношеской математической школы (ЮМШ) на тему “Введение в теорию кодов”.

Научное руководство:

- В.Л.Васильев, аспирант ПОМИ РАН. Тема диссертации: “О  $(2,3)$ -порождении симплектических групп”. В.Л.Васильев завершил обучение в аспирантуре в октябре 2011 года. В настоящее время завершается работа над окончательным текстом диссертации. Ожидаемый срок представления в диссертационный совет — январь–февраль 2012 года.
- О.Г.Балканова, студентка магистратуры СПбГУ ИТМО. В 2011 году с оценкой “отлично” защитила магистерскую диссертацию “Рациональные приближения постоянной Эйлера”.
- А.А.Афанасьев, студент 5 курса СПбГУ. Выполнял курсовую работу на тему “Инварианты подобия гурвицевых троек в  $\mathrm{PGL}_8(F)$ ”. В настоящее время это исследование получило дальнейшее развитие. Ожидается, что результатом дипломной работы станет классификация гурвицевых подгрупп в  $\mathrm{PGL}_8(F)$ , отвечающих жестким тройкам.

- А.Кноп, студент 3 курса СПбГУ. Совместное с к.ф.-м.н. Э.А.Гиршем руководство курсовой работой на тему “Диофантова иерархия”. По итогам курсовой работы А.Кноп представил доклад на конференции, а его статья принята в печать в “Записки научных семинаров ПОМИ РАН”.

#### 6. ЭКСПЕРТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

В 2011 году я выступал в роли рецензента конкурса им. Мебиуса, а также рецензировал статьи для журналов *Математический сборник*, *Записки научных семинаров ПОМИ*, *Fibonacci Quarterly*, *International Journal of Computer Mathematics*, *Hacetere Journal of Mathematics and Statistics*.