

Отчет по гранту фонда Династия за 2011 год
Леонид Петров

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

1.1. Результаты, связанные с пфаффианной динамикой на строгих разбиениях.

1.1.1. Строгое разбиение — это последовательность убывающих натуральных чисел, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_\ell > 0$. Пфаффианная динамика на строгих разбиениях возникает при рассмотрении ансамбля случайных строгих разбиений, введенного в [Vor99]. Модель строгих разбиений в [Vor99] возникла по аналогии с z -мерами на обычных разбиениях (диаграммах Юнга). Последние впервые появились при изучении гармонического анализа на бесконечной симметрической группе.

“Разумные” неприводимые представления (отвечающие неприводимым характеристам) бесконечной симметрической группы индексируются бесконечным числом непрерывных параметров. Задача гармонического анализа в теории представлений конечных/компактных групп состоит в изучении регулярного представления и его разложения на неприводимые. Для бесконечной симметрической группы ситуация иная — ее (двустороннее) регулярное представление оказывается неприводимым. В работе [KOV93] (см. также [KOV04]) было построено целое семейство обобщенных регулярных представлений бесконечной симметрической группы, которые заменяют собой регулярное. Разложение этих представлений по неприводимым и приводит к z -мерам на разбиениях.

Строгие разбиения “живут” в параллельной модели, которая возникает при рассмотрении не обычных, линейных, а проективных представлений (морфизмов в проективную группу преобразований пространства) бесконечной симметрической группы. Ансамбль случайных строгих разбиений в [Vor99] возникает из комбинаторной аналогии с z -мерами. Удовлетворительной модели аналогичных обобщенных регулярных представлений для проективного случая до сих пор не найдено. Часть моих исследований в 2011 году была посвящена поиску этих обобщенных регулярных представлений, однако пока эта деятельность не увенчалась успехом.

1.1.2. Пфаффианная динамика на строгих разбиениях была введена мной в 2010 году в [Pet11c]. Это марковский процесс на строгих разбиениях, который сохраняет ансамбль, введенный в [Vor99]. Определение динамики следует аналогичной модели для z -мер, которая исследовалась ранее в [VO06]. В случае z -мер пространственно-временные корреляционные функции¹ динамики имеют детерминантную структуру. Динамика на строгих разбиениях похожа на случай z -мер, однако, ее корреляционные функции имеют (более общую) пфаффианную структуру. В 2010 году я вычислил пфаффианное ядро, отвечающее этой динамике.

В начале 2011 года мне удалось показать, что динамика на строгих разбиениях является истинно пфаффианной, то есть, что не найдется никакого

¹Это специального вида наблюдаемые, которые полностью описывают конечномерные распределения случайного процесса. Каждая корреляционная функция — это вероятность, что в данные моменты времени в случайной эволюционирующей диаграмме Юнга найдутся строки заданных длин.

детерминантного ядра, описывающего корреляционные функции этой динамики. Для этого я получил серию т.н. детерминантных тестов — полиномов от корреляционных функций, которые зануляются, если процесс детерминантный. Структура этих детерминантных тестов все еще нуждается в дальнейшем понимании и изучении.

Стоит отметить, что одномерные (статические) распределения динамики из [Pet11c], отвечающие фиксированному времени, приводят к детерминантным точечным полям, так что вопрос о детерминантности или пфаффианности динамических корреляционных функций является, на мой взгляд, существенным.

1.1.3. В начале 2011 года, при подготовке препринта [Pet11c], была обнаружена связь моего пфаффианного ядра с детерминантным ядром динамики на z -мерах из работы [VO06]. Оказывается, одно ядро напрямую выражается через другое с помощью достаточно несложной формулы. Таким образом, на уровне формул для ядер две динамические модели оказываются очень близки. В частности, результаты об асимптотическом поведении пфаффианной динамики (которое можно изучать, рассматривая асимптотику ядра) напрямую следуют из соответствующих результатов [VO06]. Это наблюдение позволило значительно улучшить препринт работы [Pet11c], и она была опубликована в 2011 году.

Другая, комбинаторная связь двух ансамблей — z -мер на обычных разбиениях и аналогичного ансамбля строгих разбиений из [Vor99] — была обнаружена мной довольно давно, и в 2011 году эти результаты были доработаны и опубликованы в [Pet11b].

1.1.4. Вырождение пфаффианной динамики на строгих разбиениях приводит к динамической модели, связанной с мерой Планшереля на строгих разбиениях.² Было получено два доказательства основных результатов в этой модели: одно путем вырождения формул из [Pet11c], а другое — путем приложения формализма сдвинутого процесса Шура, который был разработан в работе [Vul07]. Отмечу, что этот формализм неприменим в более общем случае пфаффианной динамики [Pet11c]. Было изучено предельное поведение динамической модели, связанной с мерами Планшереля на строгих разбиениях.

В одном из режимов возникает новое т.н. полу-синус-ядро, которое описывает (статическое) детерминантное точечное поле, живущее на целой полурешетке. Пфаффианная динамика в этом же режиме доставляет пфаффианное расширение этого ядра. На самом деле, существует целое семейство расширений этого полу-синус-ядра, которые зависят от бесконечного числа непрерывных параметров. Одно из них (отличное от моего) возникает в [Vul07] при изучении случайных строгих плоских разбиений. Все остальные также можно получить, рассматривая подходящие специализации общей модели [Vul07]. Возникающая здесь ситуация — это сдвинутый аналог моделей, изучавшихся в [BS10]. При этом сдвинутый аналог гиббсовского свойства из [BS10] еще предстоит определить и исследовать.

²Строгие разбиения числа n по существу индексируют неприводимые проективные представления симметрической группы $S(n)$. Мера Планшереля придает каждому строгому разбиению вес, пропорциональный (с некоторыми незначительными оговорками) квадрату размерности этого представления. Эти меры аналогичны мерам Планшереля на обычных разбиениях, которые исследовались, например, в [VO00].

1.2. $\mathfrak{sl}(2)$ -операторы и марковская динамика на ветвящихся графах.

Изучение пфаффианной динамики в работе [Pet11c] проводилось с использованием операторов Керова, которые порождают представление (специального вида) алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в пространстве с базисом, индексированном строгими разбиениями. Похожие операторы на графе Юнга (отвечающие z -мерам) были придуманы С. Керовым и появились в работе [Око01].³ Они использовались для вычисления статических корреляционных функций z -мер. В [Pet11c] используются аналогичные операторы, и глубокое обобщение методов [Око01] приводит к динамическим корреляционным функциям.

Часть моих исследований в 2011 году была посвящена операторам Керова на абстрактных графах ветвления. В результате была написана работа [Pet11a]. Оказывается, что, отталкиваясь от наличия $\mathfrak{sl}(2)$ -структуры на графе ветвления, можно единообразно охарактеризовать z -меры на разбиениях (и их обобщение с параметром Джека [BO05]), меры на строгих разбиениях из [Vor99], а также меры на разбиениях, отвечающие двухпараметрическим распределениям Пуассона-Дирихле [PY97]. Данные меры единым естественным образом возникают для разных графов ветвления.

Использование $\mathfrak{sl}(2)$ -операторов позволяет ввести случайную марковскую динамику на графе, которая сохраняет эти выделенные меры, и исследовать ее свойства. Главный мой результат заключается в том, что для генератора этой динамики можно явно указать ортогональный собственный базис (в L^2 по стационарной мере). Таким образом, достигается значительное обобщение результатов работ [Ols10], [Ols11], [DN11], в которых рассматривались модели z -мер на разбиениях (первые две работы, дискретная и непрерывная модели) и z -мер с параметром Джека (третья работа, только непрерывная модель). Мой подход с операторами Керова дает новые доказательства многих результатов, полученных в этих работах.

Мои результаты также можно считать обобщением чисто комбинаторных исследований, связанных с дифференциальными частично упорядоченными множествами [Sta88] и двойственными градуированными графами [Fom94]. Подходящее вырождение (отвечающее, например, вырождению z -мер к мерам Планшереля на разбиениях) сводит $\mathfrak{sl}(2)$ -структуру операторов Керова к структуре трехмерной алгебры Гейзенберга, которая как раз отвечает моделям работ [Sta88], [Fom94]. Изучение этих комбинаторных результатов во многом послужило мотивацией для моих исследований операторов Керова. Стоит отметить, что рассмотрение более богатой $\mathfrak{sl}(2)$ -структуры снижает число моделей, в которых она возникает.

2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

- [Pet11a] $\mathfrak{sl}(2)$ Operators and Markov Processes on Branching Graphs — опубликована в arXiv, подана в Journal of Algebraic Combinatorics.
- [Pet11b]

On Measures on Partitions Arising in Harmonic Analysis for Linear and Projective Characters of the Infinite Symmetric Group — опубликована в arXiv и трудах международной конференции “50 лет ИППИ”.

³Один частный случай этих операторов возникал ранее в [Pro82].

- [Pet11c] Pfaffian Stochastic Dynamics of Strict Partitions — вторая, сильно переработанная версия опубликована в arXiv, журнальная версия подана и опубликована в Electronic Journal of Probability (2011, Pages: 2246-2295).

3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

- Доклад
On Measures on Partitions Arising in Harmonic Analysis for Linear and Projective Characters of the Infinite Symmetric Group
на международной конференции “50 лет ИППИ”, Москва, июль 2011.
- Участие с докладом
Infinite-dimensional Diffusions Related to the Two-parameter Poisson-Dirichlet Distributions
в EURANDOM Workshop YEP VIII 2011 “Stochastic Models for Population Dynamics”, Эйндховен, Нидерланды, март 2011.

4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

- Обзорный доклад
Totally nonnegative Toeplitz matrices and characters of “big” groups
на совместном семинаре Northeastern University — MIT, Boston, MA, USA, ноябрь 2011.
- Доклад
Plancherel measures on strict partitions and Pfaffian dynamics
на семинаре по дискретной математике в Brown University, Providence, RI, USA, октябрь 2011.
- Доклад
sl(2) Operators and Markov Processes on Branching Graphs
на семинаре по комбинаторике в University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, октябрь 2011.
- Доклад (3 часа)
Noncolliding Particle Dynamics, Determinantal and Pfaffian Point Processes
в Northeastern University, Boston, MA, USA, сентябрь 2011.
- Научный визит (по обмену РАН и Венгерской Академии Наук) в Alfred Renyi Institute of Mathematics, Будапешт, Венгрия, май 2011, с докладами
Infinite-Dimensional Diffusion Processes Approximated by Finite Markov Chains on Partitions
в Alfred Renyi Institute of Mathematics и
Pfaffian Stochastic Dynamics of Strict Partitions
в Budapest University of Technology and Economics.

5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

- Осень 2011: Calculus 2 for Science & Engineering в Northeastern University, Boston, MA, USA (лекции и упражнения).
- Весна 2011: курс “Комбинаторика” на программе Math in Moscow в НМУ, Москва (лекции и упражнения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BO05] A. Borodin and G. Olshanski, *Z-measures on partitions and their scaling limits*, European J. Combin. **26** (2005), no. 6, 795–834, arXiv:math-ph/0210048.
- [BO06] ———, *Markov processes on partitions*, Probab. Theory Related Fields **135** (2006), no. 1, 84–152, arXiv:math-ph/0409075.
- [BOO00] A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 3, 481–515, arXiv:math/9905032 [math.CO].
- [Bor99] A. Borodin, *Multiplicative central measures on the Schur graph*, Jour. Math. Sci. (New York) **96** (1999), no. 5, 3472–3477, in Russian: Zap. Nauchn. Sem. POMI **240** (1997), 44–52, 290–291.
- [BS10] A. Borodin and S. Shlosman, *Gibbs ensembles of nonintersecting paths*, Communications in Mathematical Physics **293** (2010), no. 1, 145–170, arXiv:0804.0564 [math-ph].
- [DH11] P. Desrosiers and M. Hallnas, *Hermite and Laguerre symmetric functions associated with operators of Calogero-Moser-Sutherland type*, arXiv:1103.4593 [math.QA].
- [Fom94] S. Fomin, *Duality of graded graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994), no. 4, 357–404.
- [KOV93] S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Ser. I **316** (1993), 773–778.
- [KOV04] ———, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*, Invent. Math. **158** (2004), no. 3, 551–642, arXiv:math/0312270 [math.RT].
- [Oko01] A. Okounkov, *SL(2) and z-measures*, Random matrix models and their applications (P. M. Bleher and A. R. Its, eds.), Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. **40**, pp. 407–420, Cambridge Univ. Press, 2001, arXiv:math/0002135 [math.RT].
- [Ols10] G. Olshanski, *Laguerre and Meixner symmetric functions, and infinite-dimensional diffusion processes*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **378** (2010), 81–110, 230, arXiv:1009.2037 [math.CO].
- [Ols11] ———, *Laguerre and Meixner orthogonal bases in the algebra of symmetric functions*, arXiv:1103.5848 [math.CO].
- [Pet11a] L. Petrov, *$\mathfrak{sl}(2)$ Operators and Markov Processes on Branching Graphs*, 2011, arXiv:1111.3399 [math.CO].
- [Pet11b] ———, *On Measures on Partitions Arising in Harmonic Analysis for Linear and Projective Characters of the Infinite Symmetric Group*, Proceedings of the international conference “50 years of IITP”, July 2011, arXiv:1107.0676 [math.CO].
- [Pet11c] ———, *Pfaffian stochastic dynamics of strict partitions*, Electron. J. Probab. **16** (2011), 2246–2295, arXiv:1011.3329 [math.PR].
- [Pro82] R.A. Proctor, *Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra*, The American Mathematical Monthly **89** (1982), no. 10, 721–734.
- [PY97] J. Pitman and M. Yor, *Two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator*, The Annals of Probability **25** (1997), no. 2, 855–900.
- [Sta88] R. Stanley, *Differential posets*, Journal of the American Mathematical Society **1** (1988), no. 4, 919–961.
- [Vul07] M. Vuletic, *Shifted Schur Process and Asymptotics of Large Random Strict Plane Partitions*, International Mathematics Research Notices **2007** (2007), no. rnm043, arXiv:math-ph/0702068.